Analysis II

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

Mitschrift von
Christof Gehrig (christof.gehrig@stud.uni-heidelberg.de)
Nico Haaf (nico.haaf@stud.uni-heidelberg.de)
Josua Kugler (josua.kugler@stud.uni-heidelberg.de)
Christian Merten (christian.merten@stud.uni-heidelberg.de)
Rui Yang (rui.yang@stud.uni-heidelberg.de)

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen und Reihen von Funktionen

1.1 Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.1. Sei für $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \colon D \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, x) > 0 \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Beispiel 1.2. (a)

$$f_n(x) \colon [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0,2]$.
$x = 0$: $f_n(0) = 0 = f(0)$
$0 < x \leq 2$: $\forall n \geq \frac{2}{x}$, $f_n(x) = 0 = f(x)$

(b) $f_n(x) = x^n$, $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\text{punktweise}]{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Bemerkung 1.3. Punktweiser Limes stetiger Funktionen muss nicht stetig sein.

Definition 1.4. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$ falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.d. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Bemerkung 1.5. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n \geq N$ gilt

$$\operatorname{graph}(f_n) \subset \varepsilon\text{-Umgebung von Graphen von } f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Beispiele 1.2 (a) und (b) nicht gleichmäßig konvergent, zu (a): Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n > \frac{1}{2}$

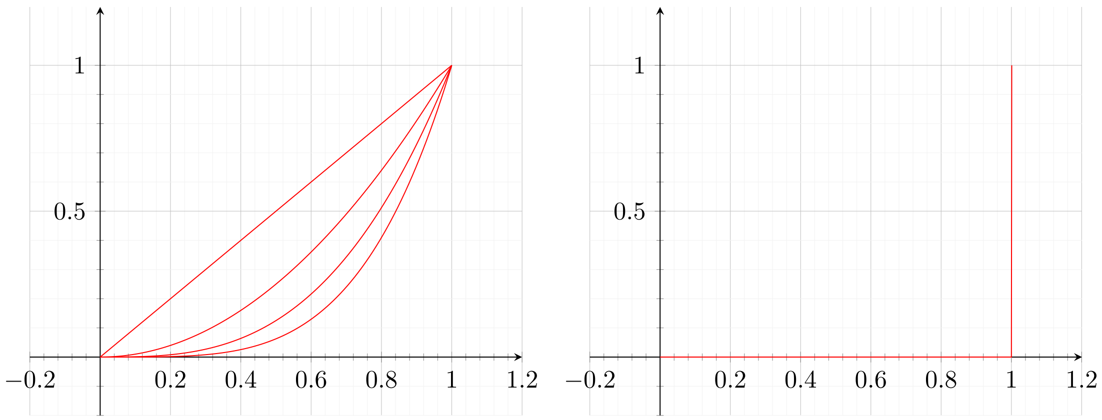


Abbildung 1.1: $f_n(x) = x^n$ und ihre Grenzfunktion

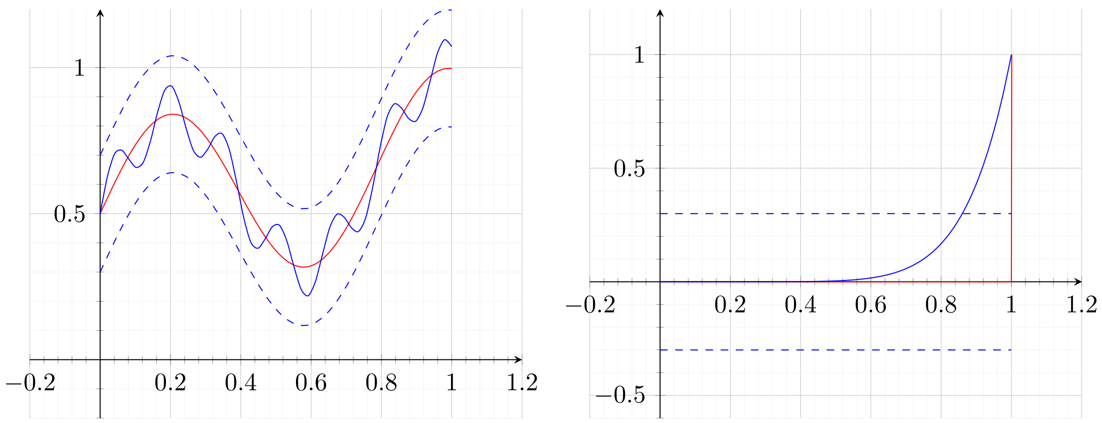


Abbildung 1.2: Links: „ε-Schlauch“, Rechts: 1.2 (b) nicht gleichmäßig konvergent

Beispiel 1.6. $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(2\pi n \cdot x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.

$$|\sin(2\pi n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in [0,2] \implies \text{punktweise Konvergenz.}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Damit folgt

$$\forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall x \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

Bemerkung 1.7. Konvergiert $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, dann konvergiert f_n punktweise gegen f. Die Umkehrung gilt nicht, siehe 1.2 (a) und (b).

Satz 1.8 (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig)**.** *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist stetig in D.*

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} f \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N \quad \forall x \in D \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$f_n \text{ stetig in } x_0 \implies \exists \delta \text{ s.d. } \forall x \in D \text{ gilt } |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammen: $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

□

1.2 Der Funktionenraum $C[a, b]$

Definition 1.9 (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$)**.** Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit des Absolutbetrags und weil $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1.10 ($\|\cdot\|_\infty$ und gleichmäßige Konvergenz)**.** Es sei $D = [a, b]$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(ii) Cauchy-Kriterium: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Beweis. (i) „$\Longrightarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in [a, b]$ und $\forall n \geq N$. Damit folgt:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

„$\Longleftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon\ \forall n \geq N$. Damit folgt $\forall n \geq N$ und $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \implies \text{gleichmäßige Konvergenz.}$$

(ii) „$\Longrightarrow$“ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$, d.h. $\exists f : [a, b] \to \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} f$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}\ \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}&|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies &\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_0.\end{aligned}$$

„ $\Longleftarrow$ “: Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0 \quad \forall x \in [a, b].$$

$\Longrightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert
$\Longrightarrow$ Definiere $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

Dann gilt $\forall n \geq N_0$, $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f.$$

□

Bemerkung 1.11. $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt s.g. Normeigenschaften:

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \implies f(x) = 0, x \in [a, b]$ (Definitheit)

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität)

(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

folgen direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags.

Definition 1.12. Der Funktionenraum $C[a, b]$ definiert durch

$$C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \},$$

ist mit $\|f\|_\infty$ ein normierter Vektorraum.

Satz 1.13 (Vollständigkeit)**.** Der Raum $C[a, b]$ ist vollständig bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ besitzt einen Limes in $C[a, b]$

Beweis. Rannacher □

1.3 Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: Wenn $f_n \to f$, gilt dann auch $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$?

Satz 1.14. Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Riemann-integrierbare Funktionen und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Beweis. $f_n \xrightarrow[\text{gleichmäßig}]{n\to\infty} f \implies f$ stetig $\implies f$ Riemann-integrierbar.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \\
&\le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \\
&\le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\cdot(b-a) \\
&= \underbrace{\|f_n-f\|_\infty}_{\xrightarrow{n\to\infty}0}\ \underbrace{(b-a)}_{\text{beschränkt}}\ .
\end{aligned}
$$

□

Satz 1.15. Seien $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen ($n\in\mathbb{N}$) und die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \quad \forall x\in[a,b].$$

ist stetig und Riemann-integrierbar und

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

Beweis. f_n sind stetig $\implies \sum_{k=0}^n f_k(x)$ stetig und Riemann-integrierbar.

Die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) \text{ stetig } = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right) \text{ gleichmäßiger Limes.}$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig, d.h. $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, s.d. $\forall N\ge N_\varepsilon$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \varepsilon\cdot(b-a) \\
\implies &\left|\int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \varepsilon\cdot(b-a) \\
\implies &\int_a^b \sum_{n=0}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^N \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 1.16 (Integration von Potenzreihen)**.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a,b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b .$$

Beweis. Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x - x_0| \leq r$ ist zu beweisen: Für $|x - x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right\|_{\infty} \\
&\overset{|x-x_0|<r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho - \varepsilon} \right)^n \cdot r^n \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho - \varepsilon} \right)}_{<1}^n \xrightarrow[\text{geometrische Reihe}]{N \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

$(*)$: $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, $r < \rho - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0 \implies \exists N_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho - \varepsilon}$ $\forall n \geq N_0$ □

Jetzt: Fourier Analysis!

1.4 Der Funktionen-Raum $R[a,b]$

Definition 1.17. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Bemerkung 1.18. 1. Analog: Definitionen von uneigentlichen Riemann-integralen für komplexwertige Funktionen

2. Die Rechenregeln für das reelle Riemann-integral übertragen sich auf komplexwertige Integrale, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (\mathrm{Re} f(x) - i \cdot \mathrm{Im} f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\,\mathrm{d}x - i \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} .
\end{aligned}$$

Definition 1.19. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt stückweise stetig, falls

1) f in $[a,b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist.
2) in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a,b]$ die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte
$$f(\xi_\pm) := \lim_{h \searrow 0} f(\xi \pm h).$$
existieren. Für $\xi \in (a,b)$ wird
$$f(\xi) := \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2}.$$
gesetzt.

Bemerkung 1.20. Stückweise stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Die Menge der in diesem Sinne auf $[a,b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden einen Vektorraum $R[a,b]$.

Definition 1.21. Wir definieren
$$(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(„Sesquilinearform“).}$$
Dies ist wohldefiniert da für $f, g \in R[a,b]$ das Produkt $f(x) \cdot \overline{g(x)} \in R[a,b]$ ist.

Definition 1.22 (Skalarprodukt)**.** Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt auf V, falls $\forall u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle}$ (Symmetrie, hermitesch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

(S2) $\langle \alpha v,u\rangle = \alpha\langle v,u\rangle$
$\langle v,\alpha u\rangle = \overline{\alpha}\langle v,u\rangle$
$\langle v,u+w\rangle = \langle v,u\rangle + \langle v,w\rangle$
$\langle v+u,w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle u,w\rangle$

(S3) Positivdefinitheit: $\langle v,v\rangle \geq 0$
$\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0$

Bemerkung 1.23. Auf $R[a,b]$ besitzt $(\cdot,\cdot)$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts, denn es gilt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in R[a,b]$, $f_1, f_2 \in R[a,b]$, $g_1, g_2 \in R[a,b]$:

(1) $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = (\alpha f_1, g) + (\beta f_2, g) = \alpha(f_1,g) + \beta(f_2,g)$

(2) $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = (f, \alpha g_1) + (f, \beta g_2) = \overline{\alpha}(f,g_1) + \overline{\beta}(f,g_2)$

(3) $(f,g) = \displaystyle\int_a^b f \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \overline{\overline{f}g}\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b \overline{f}g\,\mathrm{d}x} = \overline{\int_a^b g\overline{f}\,\mathrm{d}x} = \overline{(g,f)}$

(4) $(f,f) = \displaystyle\int_a^b f\overline{f}\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0$

(5) Aus (4) und der Definition von $R[a,b]$ folgt: $(f,f) = 0 \implies f \equiv 0$ auf $[a,b]$.

$(\cdot, \cdot)$ wird auf $R[a, b]$ L^2-Skalarprodukt genannt.

Lemma 1.24. Für ein L^2-Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $R[a, b]$ gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Beweis. 1) Falls $g \equiv 0$ gilt trivialerweise

$$|(f, g)|^2 = 0 = (f, f) \cdot (g, g).$$

2) Falls $g \not\equiv 0$, sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig

$$0 \leq (f + \alpha g, f + \alpha g) = (f, f) + \alpha(g, f) + \overline{\alpha}(f, g) + \alpha \cdot \overline{\alpha}(g, g).$$

Setze $\alpha := -\frac{(f,g)}{(g,g)} = -\frac{\overline{(g,f)}}{(g,g)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq (f, f) - \frac{(f, g) \cdot (g, f)}{(g, g)} - \frac{(g, f) \cdot (f, g)}{(g, g)} + \frac{(f, g)(g, f)(g, g)}{(g, g)(g, g)} \\
&= (f, f) - \frac{(f, g)(g, f)}{(g, g)} \\
&= (f, f) - \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)} \\
&= (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} \\
\implies & 0 \leq (f, f)(g, g) - |(f, g)|^2.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.25 (L^2-Norm)**.** Das L^2-Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ induziert die L^2-Norm auf $R[a, b]$ mit

$$\|f\| = \|f\|_{L^2} := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f \cdot \overline{f} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bemerkung 1.26. Normeigenschaften von L^2 auf $R[a, b]$ sind erfüllt:

(N1) Definitheit: $\|f\| = 0 \implies (f, f) = 0 \implies f = 0$ auf $[a, b]$

(N2) Homogenität: $\|\alpha f\| = (\alpha f, \alpha f)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 (f, f))^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|f\|$

(N3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &= (f + g, f + g)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\|f\|^2 + (f, g) + (g, f) + \|g\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \left(\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Definition 1.27 (Konvergenz im Quadratischen Mittel (L^2-Konvergenz))**.** Seien $f_n \in R[a,b], n \in \mathbb{N}, f \in R[a,b]$. f_n konvergiert gegen f im Quadratischen Mittel $f_n \xrightarrow[L^2]{n\to\infty} f$, wenn gilt

$$\|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Das heißt, dass die quadratische Abweichung zwischen f_n und f gegen Null konvergiert:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Bemerkung 1.28. (1) Es gilt:

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le \|f_n - f\|_\infty^2 (b-a).$$

Damit folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \|f_n - f\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Die Umkehrung gilt i.A. nicht! Beispiel: $f_n(x) := x^n$, $x \in [-1,1]$

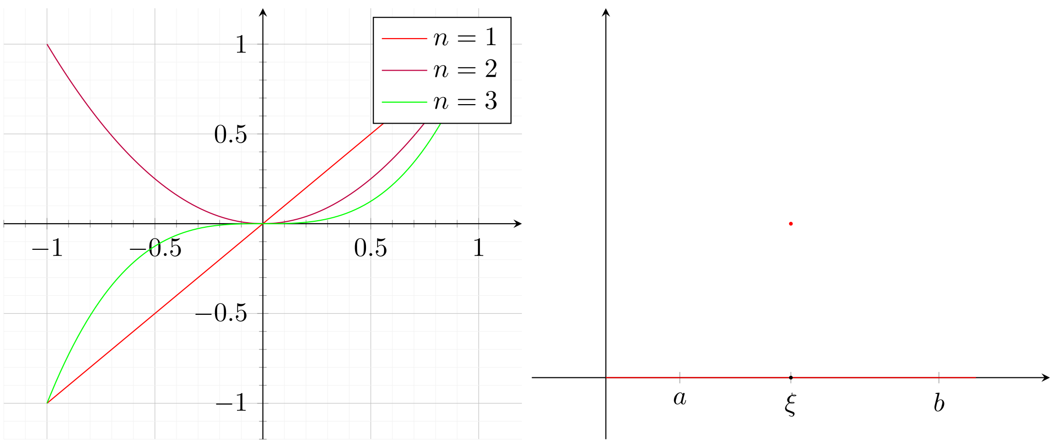


Abbildung 1.3: Links: $f_n(x) = x^n$, Rechts: $f(x) \not\equiv 0$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{2n} \,\mathrm{d}x = 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit folgt $f_n \xrightarrow[L^2]{n\to\infty} f \equiv 0$.

Aber wegen $f_n(1) = 1$ für $x = 1$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert f_n nicht punktweise gegen $f \equiv 0$ und wegen $f_n(-1) = (-1)^n, n \in \mathbb{N}, x = -1$ konvergiert f_n nicht.

(2) Der Raum $R[a,b]$ mit L^2-Norm $\|\cdot\|$ ist **nicht vollständig**, d.h. es existieren Cauchy-Folgen in $R[a,b]$, die keinen Grenzwert in $R[a,b]$ haben. Beispiel: siehe Abb. 1.3 (Rechts). Hier ist $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a,b]$.

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0 = \|f\|_{L^2},$$

aber $f(x) \notin R[a,b]$, denn

$$f(\xi) \neq 0 = \frac{\lim_{h\searrow 0} f(\xi+h) - \lim_{h\searrow 0} f(\xi-h)}{2}.$$

Definition 1.29 (Orthogonalität). $f, g \in R[a,b]$ heißen orthogonal, wenn gilt $(f,g) = 0$.

Eine Teilmenge $S \subset R[a,b]$ heißt Orthogonalsystem, wenn alle Elemente aus S paarweise orthogonal sind, d.h.

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} \|f_i\|^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall f_i, f_j \in S.$$

Satz 1.30. Die trigonometrischen Funktionen, für $k, l \in \mathbb{N}$

$$c_k(x) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \cos(kx) & \text{sonst} \end{cases}$$
$$s_l(x) := \sin(lx)$$

bilden auf $R[a,b]$ bezüglich des L^2-Skalarprodukts ein Orthogonalsystem und es gilt

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} s_l(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{kl}$$
$$\int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{kl}$$

Hier sei

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \qquad \text{Kroneckersymbol.}$$

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} c_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} = 0$$
$$\int_0^{2\pi} s_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k}(1-1) = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(kx)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_{v}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{k}\sin(kx)}_{u} \cdot \underbrace{\sin(lx)}_{v}\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{k}\sin(kx)}_{u}\,\underbrace{l\cos(lx)}_{v'}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{l}{k}\int_0^{2\pi} s_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Für $l = k$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,\mathrm{d}x \\ \implies 2\int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,\mathrm{d}x &= 0 \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x)s_k(x)\,\mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

Analog folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{l}{k}\int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x \\ \overset{l=k}{\implies} \int_0^{2\pi} c_k^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} s_k^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}(1-c_k^2(x))\,\mathrm{d}x = 2\pi - \int_0^{2\pi} c_k^2(x)\,\mathrm{d}x \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k^2(x)\,\mathrm{d}x &= \pi = \int_0^{2\pi} s_k^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Wenn $k \neq l$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{l}{k}\int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{l^2}{k^2}\int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x \\ \implies \int_0^{2\pi} c_k(x)c_l(x)\,\mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x &= 0 \\ \int_0^{2\pi} c_k(x)s_l(x)\,\mathrm{d}x &= 0. \end{aligned}$$

□

1.5 Fourier-Entwicklung

Definition 1.31 (Periodische Funktionen). $f : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$ heißt L-periodisch ($L > 0$) falls $f(x+L) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}(\implies f(x+kL) = f(x),\ \forall k \in \mathbb{Z})$. Sei f periodisch und $p > 0$. Für $\tilde{f}(x) := f\underbrace{\left(\frac{L}{p}x\right)}_{\text{Variablentransformation}}$ gilt dann $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$ ist p-periodisch

Beispiel 1.32. $p = 2\pi$

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \implies f(x) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$\tilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) \overset{f\ L\text{-per}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}$$

Hier betrachten wir deshalb nur 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$. Weiterhin betrachen wir Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathrm{K}$, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π-periodisch.

Beispiel 1.33 (Trigonometrische Polynome)**.** Für $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ betrachte

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - ib_k)e^{ikx} + (a_k + ib_k)e^{-ikx}\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \text{ mit } c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(*) : \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Für $a_k, b_k, k > 0$ ergibt sich $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Bemerkung 1.34. Ist f ein trigonometrisches Polynom, so kann man die Koeffizienten a_k, b_k, c_k durch Integration ausrechen, d.h. a_k, b_k, c_k sind eindeutig.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\,, \quad k > 0 \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2\pi}(f, e^{ikx}), \quad L_2\text{-Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Beweis. Sei zuerst $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} i\cos(\lambda x)\Big|_a^b \\ &\overset{\frac{1}{i}=-i}{=} \frac{1}{\lambda i}(\cos(\lambda x) + i\sin(\lambda x))\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{\lambda i}e^{i\lambda x}\Big|_a^b \end{aligned}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_1x}e^{-ik_2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(k_1-k_2)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } k_1 \neq k_2 \\ 2\pi, & \text{falls } k_1 = k_2 \ (\implies k_1 - k_2 = 0) \end{cases}$$

$\implies$ Behauptung für c_k. Für a_k, b_k gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\,\mathrm{d}x = c_{-k} + c_k = b_k \cdot i$$

$\square$

Bemerkung 1.35. Obige Formel gilt auch für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ixk}$$

falls die Reihen gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ konvergieren.

Frage: Hat jede 2π-periodische Funktion die Form $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ixk}$ oder kann man sie durch trigonometrische Polynome approximieren? $\Longrightarrow$ Motivation für Fourier-Reihen.

Definition 1.36 (Fourier-Reihe)**.** Sei $f \in R[a, b]$ 2π-periodisch. Die Fourier-Koeffizienten von f sind gegeben durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ixk} \, \mathrm{d}x \; = \frac{1}{2\pi}(f, e^{ixk})$$

Die (formale) Fourier-Reihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit der n-ten Partialsumme

$$s_n(x) = s_n(f, x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Die Fourier-Reihe läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x$$

Satz 1.37. Sei $f \in R[a, b]$ eine 2π-periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$ und $s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Beweis. Notation $e_k(x) := e^{ikx}$

$$(e_k, e_l) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ikx} \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(f, e_k) \implies (f, e_k) = 2\pi c_k$$

$$(f, s_n) = \sum_{k=-n}^{n} (f, c_k e_k) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}(f, e_k) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} 2\pi c_k = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

$$(s_n, s_n) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} \underbrace{c_k \overline{c_k}}_{|c_k|^2} \cdot \underbrace{(e_k, e_l)}_{= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 2\pi, & k = l \end{cases}}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|f - s_n\|^2 &= (f - s_n, f - s_n) \\ &= (f, f) - (f, s_n) - (s_n, f) + (s_n, s_n) \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 1.38 (Besselsche Ungleichung)**.** Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2\pi}$$

Beweis. Aus Satz 1.37

$$2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \|f\|^2 - \underbrace{\|f - s_n\|^2}_{\geq 0} \leq \|f\|^2$$

Die Konvergenz folgt unter Beachtung der Monotonie und Beschränktheit der Folge

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

□

Bemerkung 1.39. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ 2π-periodisch und $\|f - s_n\|^2 \xrightarrow{L^2} 0$, $n \to \infty$, d.h. die Fourier-Reihe konvergiert gegen f in L^2. Das ist nach Satz 1.37 äquivalent zu

$$\|f\|^2 = 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \Leftrightarrow \|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Frage: Unter welchen Bedingungen für f gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k.
Ziel: Zeige die Parsevalsche Gleichung für die Fourier-Koeffizienten c_k, $\{e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$, $f \in R[a,b] \implies$ Konvergenz der Fourier-Reihe in L^2.

Lemma 1.40. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} - \frac{1}{2}$$

Beweis. $\cos(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right)$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2} e^{-int} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}}_{\text{geometrische Summenformel}} \\
&= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{e^{-int} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} \\
&\overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.41. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt für $x \in [a,b]$ und $s \in \mathbb{R}$

$$F_s(x) := \int_a^x f(y) \sin(sy) \, \mathrm{d}y$$

konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $|s| \to \infty$ und $x \in [a,b]$.

Beweis. Sei $s \neq 0$.

$$F_s(x) = \int_a^x f(y)\sin(sy)\,\mathrm{d}y \overset{\text{part. Integr.}}{=} -f(y)\frac{1}{s}\cos(sy)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{1}{s}\cos(sy) f'(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

f, f' stetig auf $[a,b] \implies \exists M > 0,$ s.d. $|f(y)| \leq M, |f'(y)| \leq M$ mit $y \in [a,b]$. Dann gilt $|F_s(x)| \leq \frac{2M}{|s|} + \frac{M}{|s|} \cdot (b-a)$, $\forall x \in [a,b]$. Also konvergiert $|F_s(x)|$ gleichmäßig gegen 0 für $|s| \to \infty$ und $x \in [a,b]$. □

Lemma 1.42. Es gilt $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen Intervallen $[\delta, 2\pi-\delta]$ für $\delta > 0$.

Beweis. Aus Hilfslemma 1.40 folgt für $0 < x < 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(ky)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(ky) \right) \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Lemma 1.40}}{=} \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{\pi}^{x} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\,\mathrm{d}y}_{=:F_n(x)} - \frac{1}{2}(x-\pi)
\end{aligned}$$

Z.Z.: $F_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 für $n \to \infty$. Die Funktion $f(y) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$ ist auf dem Intervall $[\delta, 2\pi-\delta]$ stetig differenzierbar, weil $\frac{y}{2} \neq 0$ auf $[\delta, 2\pi-\delta]$, sodass aus Hilfslemma 1.41 folgt

$$F_n(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right) \mathrm{d}y \overset{\text{glm.}}{\to} 0$$

für $n \to \infty$ und $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$. ☐

Lemma 1.43. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

konvergiert gleichmäßig $\forall x, 0 \leq x \leq 2\pi$. Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis. Lemma 1.42 $\implies \forall x, y \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(y-\pi)^2}{4} &= \int_{y}^{x} \frac{t-\pi}{2}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{1.42}{=} - \int_{y}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\substack{\text{glm. Konv.} \\ \text{Satz 1.15}}}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{y}^{x} \frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ky)}{k^2}
\end{aligned}$$

$$\overset{y \text{ fest}}{\Longrightarrow} \frac{(x-\pi)^2}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \quad \forall x \in (0, 2\pi), C \text{ konst}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Bestimme die Konstante C:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} \,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} + C \right) \mathrm{d}x \\
\frac{\pi^3}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} \,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_0^{2\pi} C \,\mathrm{d}x \\
\frac{\pi^3}{6} &= C \cdot 2\pi \\
C &= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \qquad x \in (0, 2\pi)$$

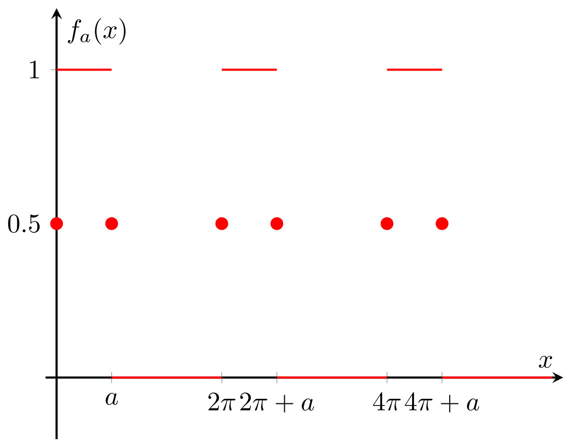
Für $x = 0$ oder $x = 2\pi$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang, da beide Seiten stetig sind auf $[0, 2\pi]$ □

Lemma 1.44. Sei f Treppenfunktion, $f \in R[0, 2\pi]$, 2π periodisch. Dann $s_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ in $L^2[0, 2\pi]$, d.h. Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis. Zunächst Spezialfall

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0.5, & x \in \{0, a\} \\ 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Es gilt $\|f_a\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f_a|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^a 1 \,\mathrm{d}x = a$.



Fourier-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a}{2\pi} \\
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) e^{-ikx} \Big|_0^a \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{iik} \right) \left(e^{-ika} - 1 \right) \\
&\overset{k \neq 0}{=} \frac{i}{2\pi k} \left(e^{-ika} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
|c_k|^2 &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \underbrace{\left(e^{-ika} - 1 \right) \left(e^{ika} - 1 \right)}_{=1-e^{ika}-e^{-ika}+1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \cos(ka) \right) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \underbrace{\frac{a^2}{4\pi^2}}_{a_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2 \right) \\
&\overset{\cos(-ka)=\cos(ka)}{=} \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \cos(ka) \right) \\
&= \frac{a}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \cos(ka)}_{=\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}} \\
&= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{(a-\pi)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{a}{2\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = a = ||f_a||_{L^2}
$$

$$
\xrightarrow{\text{Satz 1.37}} \|f_a - s_n(f_a)\|_{L^2}^2 = \|f_a\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0
$$

Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine beliebige 2π-periodische Treppenfunktion mit Sprungstellen

$$
a_j \in (0, 2\pi) \quad j = 1, \ldots, l
$$

Jede Treppenfunktion f läßt sich schreiben als

$$
f(x) = \sum_{j=1}^{l} d_j \underbrace{f_{a_j}(x)}_{\text{Spezialfunktion (als } f_a(x))}, x \in [0, 2\pi]
$$

f_{a_j} Spezielle Treppenfunktion mit Sprungstelle $a = a_j$ und $f_{a_j}(x) \in \{0,1\}$ $\forall j, x \neq a_j$. Dann $\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\| \xrightarrow{L^2} 0, n \to \infty$. Betrachte

$$s_n(f) = \sum_{j=1}^{l} d_j s_n(f_{a_j})$$

und

$$\|f - s_n(f)\| = \left\| \sum_{j=1}^{l} d_j (f_{a_j} - s_n(f_{a_j})) \right\| \leq \sum_{j=1}^{l} |d_j| \underbrace{\|f_{a_j} - s_n(f_{a_j})\|}_{\xrightarrow{L^2} 0} \xrightarrow{L^2} 0,\ n \to \infty$$

$\square$

> **Satz 1.45.** Sei $f \in R[0, 2\pi]$ eine 2π-periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Parsevalsche Gleichung (sog. Vollständigkeitsrelation)
>
> $$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}_{=\|f\|^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis. O.B.d.A. sei f reellwertig (sonst werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt) und $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0, 2\pi]$ (sonst betrachte $\overline{f}(x) := \frac{f(x)}{M}$, $M = \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu ε 2π-periodische Treppenfunktionen $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \leq 1$$

und

$$\max_{x \in [0,2\pi]} |\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{16\pi} \varepsilon^2$$

Konstruktion von $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ siehe Rannacher. Dann,

$$|f - \varphi_\varepsilon|^2 \leq |\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon|^2 \leq (|\psi_\varepsilon| + |\varphi_\varepsilon|)(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \underset{\substack{|\psi_\varepsilon|<1 \\ |\varphi_\varepsilon|<1}}{\leq} 2(\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)$$

und

$$\|f - \varphi_\varepsilon\|^2 = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \,\mathrm{d}x \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Weiter gilt: φ_ε Treppenfunktion $\overset{1.44}{\Longrightarrow}$ Fourier-Reihe von φ_ε konvergiert gegen φ_ε in L^2, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon :\ \forall n \geq n_\varepsilon :\ \|s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus Satz 1.38 folgt

$$\|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\|^2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|f - s_n(f)\| &= \|f - s_n(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\| \\
&\leq \|(f - \varphi_\varepsilon) - s_n(f - \varphi_\varepsilon)\| + \|\varphi_\varepsilon - s_n(\varphi_\varepsilon)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\implies s_n(f) \xrightarrow{L^2} f, \ n \to \infty$$

$\square$

Bemerkung 1.46. Konvergenz in L^2 ist „sehr schwach“. Für „glattere“ Funktionen konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.

Satz 1.47. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. $\exists$ Unterteilung von $[0, 2\pi]$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 2\pi$$

mit $f\big|_{[t_{j-1}, t_j]}$ ist stetig differenzierbar für $j = 1, \ldots, m$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis. f stetig $\implies f \in R[0, 2\pi] \implies$ Fourier-Reihe von f konvergiert gegen f in L^2, d.h. $\|s_n(f) - f\| \xrightarrow{L^2} 0, \ n \to \infty$. Betrachte $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \phi(x) = \phi_j(x), \ x \in (t_{j-1}, t_j), \ \phi_j : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ stetige Ableitung von $f\big|_{[t_j-1, t_j]}$. Definiere ϕ in t_j entsprechend (möglich, da ϕ eine stückweise stetige Funktion ist). Defininition von $R[0, 2\pi] \implies \phi \in R[0, 2\pi] \implies$ Für die Fourier-Koeffizienten von ϕ gilt: $\gamma_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\phi\|^2 < \infty$. Berechne Fourier-Koeffizienten c_k von f

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{part.Integr.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{i}{k} e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{f'(x)}_{\phi(x)} \frac{i}{k} e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{-i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{-i}{k} \gamma_k \\
&\implies |c_k| = \frac{1}{k} |\gamma_k|
\end{aligned}$$

Es gilt $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2}|\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\beta|^2$, da Quadrate größer 0 sind

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} + \frac{|\gamma_k|^2}{2} \\
&\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty \\
&\implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \text{ absolut konvergent} \\
&\implies \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}}_{\text{Fourier-Reihe von} f}
\end{aligned}$$

konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion g, die stetig ist. Also $s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} g, \ n \to \infty, \ \Rightarrow$

$s_n(f) \xrightarrow{L^2} g,\ n \to \infty$. Andererseits $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f,\ n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \ \|f-g\|_{L^2} = 0 \\ &\Longrightarrow \ f \equiv g,\ \text{weil } f \text{ und } g \text{ stetig sind} \\ &\Longrightarrow \ s_n(f) \xrightarrow{\text{glm.}} f,\ n \to \infty \end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 2

Der n-dimensionale Zahlenraum K^n

2.1 Der euklidische Raum K^n

Bemerkung 2.1. K^n bezeichnet den Vektorraum der n-Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}, i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$ mit Addition $x + y := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Definition 2.2. Sei X irgendeine Menge.
Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften:

M1 (Definitheit) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2 (Symmetrie) $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 (Dreiecksungleichung) $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) besteht aus einer Menge X mit einer Metrik d. Man nennt $d(x, y)$ auch den Abstand oder die Distanz von x und y.

Beispiel 2.3. (1) $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $d(x, y) := |x - y|$ ist ein metrischer Raum, denn:

M1 folgt aus $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|x| \geq 0$,
M2 folgt aus $|x - y| = | - (y - x)| = |y - x|$,
M3 folgt aus $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

(2) (induzierte Metrik) Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$. Die induzierte Metrik d_A auf A ist definiert durch $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, $\forall x, y \in A$. Dann wird (A, d_A) zu einem metrischen Raum.

(3) (triviale Metrik) Sei X eine Menge. Die Triviale Metrik wird definiert durch:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = y \\ 1, & \text{für } x \neq y \end{cases}.$$

(4) Weiteres wichtiges Beispiel: metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen.

Definition 2.4. (normierter Raum) Sei V irgendein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm (auf V), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

N1 (Definitheit) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2 (Homogenität) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in \mathbb{K}$.

N3 (Dreiecksungleichung) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung 2.5. (Norm $\rightsquigarrow$ Metrik) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x, y) := \|x - y\|, \forall x, y \in V$ eine Metrik auf V.

Beispiel 2.6. Normen in $\mathbb{R}^n$.

(1) Euklidische Norm $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(2) Maximumsnorm oder ℓ^∞-Norm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1,..,n} |x_i|$.

(3) ℓ^1-Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

(4) ℓ^p-Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$.

Definition 2.7. Eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, x^{(k)} \in \mathbb{K}^n$, heißt

i) beschränkt, falls $\forall k \in \mathbb{N} : \ x^{(k)} \in K_R(0)$, $K_R(0)$ eine Kugelumgebung von 0 mit Radius R.

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x - a\|_\infty < r\}.$$

ii) Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k, l \geq N_\varepsilon$ gilt: $\left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\|_\infty < \varepsilon$.

iii) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn $\left\|x^{(k)} - x\right\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$.
geometrisch: jede Kugelumgebung $K_\varepsilon(x)$ enthält fast alle Folgenelemente $x^{(k)}$ (d.h. alle bis auf endlich viele).

Bemerkung 2.8. Offenbar:

$$\left\|x^{(k)} - x\right\|_\infty \to 0, k \to \infty \quad \Leftrightarrow$$
$$\left|x_i^{(k)} - x_i\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0, i = 1, ..., n.$$

Das heißt $\lim_{n\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ (komponentenweise Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Satz 2.9 (Satz von Cauchy und Satz von Bolzano-Weierstraß)**.**

1) Jede Cauchy-Folge in K^n konvergiert, d.h. der normierte Raum $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Raum wird Banach-Raum genannt.
2) Jede beschränkte Folge in K^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon, \forall k,l\geq N_\varepsilon : \left\|x^{(k)}-x^{(l)}\right\|_\infty<\varepsilon$.
Betrachte Komponentenfolge $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, i=1,...,n$. Die Komponentenfolgen sind Cauchy-Folgen, weil

$$\left|x_i^{(k)}-x_i^{(l)}\right|\leq\left\|x^{(k)}-x^{(l)}\right\|_\infty<\varepsilon, \forall k,l\geq N_\varepsilon, \forall i=1,...,n.$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} =: x_i \Longrightarrow x^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \text{ in } \ell_\infty \text{ Norm.}$$

2) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Longrightarrow$ $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, \forall i=1,...,n$ auch beschränkt
$\overset{\text{Bo.-We. in }\mathbb{K}}{\Longrightarrow}$ es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(k_{1,j})})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_1^{(k_{1,j})} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x_1$,
nach n Schritten haben wir Teilfolgen $(x_n^{(k_{n,j})})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ für die alle Komponentenfolgen konvergieren $(x_i^{(k_{i,j})})_{j\in\mathbb{N}} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x_i, \forall i=1,...,n$. Daraus folgt $(x^{k_{nj}}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$.

□

Satz 2.10 (Äquivalenz von Normen)**.** Sei $\mathbb{K}^n$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen äquivalent zur Maximumsnorm (ℓ_∞), d.h. zu jeder Norm $\|\cdot\|, \exists m,M>0$ sodass

$$m\,\|x\|_\infty\leq\|x\|\leq M\,\|x\|_\infty, \quad x\in\mathbb{K}^n.$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm. $\forall x\in\mathbb{K}^n, x=\sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}, k=1,...,n$ die sogenannte euklidische Basis ist: $e^{(k)}=\begin{pmatrix}\delta_{k,1}\\ \vdots\\ \delta_{k,n}\end{pmatrix}$.
Dann:

$$\begin{aligned}\|x\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k|\cdot\left\|e^{(k)}\right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max_{i=1\ldots n}|x_i|\cdot\left\|e^{(k)}\right\|\leq M\cdot\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Wobei $M:=\sum_{k=1}^n\left\|e^{(k)}\right\|$.
Setze

$$S_1:=\{x\in\mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty=1\}, \quad m:=\inf\{\|x\| \mid x\in S_1\}\geq 0.$$

Es gzz.: $m>0$. Annahme $m=0$. Dann existiert eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $x^{(k)}\in S_1$, sodass $\left\|x^{(k)}\right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Aus $x^{(k)}\in S_1$ folgt $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in der ℓ_∞-Norm. Dann impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß: es existiert eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. $(x^{(k)}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ in der ℓ_∞-Norm, dann:

$$\underbrace{\left|\underbrace{\left\|x^{(k)}\right\|_\infty}_{=1}-\|x\|_\infty\right|}_{=|1-\|x\|_\infty|}\leq\underbrace{\left\|x^{(k)}-x\right\|_\infty}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0} \Longrightarrow |1-\|x\|_\infty| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \|x\|_\infty=1 \Longrightarrow x\in S_1.$$

Anderseits:

$$\begin{aligned}&\|x\|\leq\left\|x-x^{(k)}\right\|+\left\|x^{(k)}\right\|\leq M\cdot\left\|x-x^{(k)}\right\|_\infty+\left\|x^{(k)}\right\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\\ \Longrightarrow\ &\|x\|=0 \Longrightarrow x=0.\end{aligned}$$

Widerspruch zu $x \in S_1$, also $m > 0$. Dann für $x \neq 0$ ist Vektor $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_1$ und $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$ (nach Definition von m) und $0 < m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|\,,\ x \in \mathbb{K}^n$. □

Korollar 2.11. Auf K^n sind alle Konvergenzen in irgendeiner Norm äquivalent zur Konvergenz in der ℓ_∞-Norm. (= komponentenweiser Konvergenz)

Bemerkung 2.12. Obiger Satz gilt nicht für unendlich dimensionale Räume (wie z.B. $C[a,b]$ oder $R[a,b]$). Die endliche Dimension von K^n ist entscheidend.

2.2 Teilmengen in K^n (Topologische Grundbegriffe)

Bezeichnung: $\|\cdot\|$ irgendeine Norm.

Definition 2.13 (ε-Kugel, ε-Umgebung)**.** Sei $a \in \mathbb{K}^n, r > 0$.

(1) Dann heißt $K_r(a) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|a - x\| < r\}$ die offene Kugel um a mit Radius r bzgl. $\|\cdot\|$.

(2) $U \subset K^n$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$. Insbesondere ist $K_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von a, eine sogenannte ε-Umgebung von a.

Definition 2.14 (offene Menge)**.** Eine Menge $O \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt offen, falls O eine Umgebung jedes Punktes aus O ($x \in O$) ist, das heißt $\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$.

Beispiel 2.15. (1) $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$), weil: sei $x \in]a,b[$, definiere $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$, $\varepsilon > 0$, da $a < x < b$ ist $K_\varepsilon(x) \subseteq]a,b[$

(2) $\emptyset$ leere Menge ist immer offen, $\mathbb{K}^n$ ist immer offen

(3) Die Kugel $K_r(a)$ ist immer offen: sei $x \in K_r(a)$, setze $\varepsilon := r - \|x - a\|$, dann $K_\varepsilon(x) \subseteq K_r(a)$, weil: sei $y \in K_\varepsilon(x)$. Dann gilt

$$\|y - a\| \leq \underbrace{\|y - x\|}_{<\varepsilon = r - \|x-a\|} + \|x - a\| < r - \|x - a\| + \|x - a\| = r.$$

Satz 2.16 (Eigenschaften offener Mengen)**.** Es gilt:

(1) Sind U und $V (\subseteq \mathbb{K}^n)$ offen, dann ist $U \cap V$ offen.

(2) Sei $U_i \subset \mathbb{K}^n, i \in I$ eine Familie offener Teilmengen. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (1) Sei $x \in U \cap V$. Dann $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$, $K_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Damit gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $K_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$. (Beachte: $\emptyset$ ist immer offen.)

(2) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, dann $\exists j \in I$ mit $x \in U_j$.
U_j offen $\implies \exists \varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq U_j \implies K_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

□

Korollar 2.17. 1) Endliche Schnitte und beliebige Vereinigung von offenen Mengen sind wieder offen.

2) (Beobachtung) Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen braucht nicht offen zu sein. Z.B.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n} \right[= [0,1]$$

ist nicht offen, da $K_\varepsilon(0) \not\subset [0,1], \forall \varepsilon > 0$.

Definition 2.18 (Abgeschlossene Menge)**.** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{K}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiel 2.19. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ist $[a,b]$ abgeschlossen, denn $]-\infty, a[\, \cup \,]b, \infty[\, = \mathbb{R} \setminus [a,b]$ ist offen, denn:

$$]-\infty, a[\, = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a-n, a[\text{ ist offen} \qquad]b, \infty[\, = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]b, b+n[\text{ ist offen.}$$

Satz 2.20 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen)**.**

(1) Sind V, U $(V, U \subset \mathbb{K}^n)$ abgeschlossen, dann ist $U \cup V \subset \mathbb{K}^n$ auch abgeschlossen.

(2) Sind $U_i, (i \in I)$ abgeschlossene Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ auch abgeschlossen.

Beweis. (1) $(U \cup V)^c = \underbrace{U^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{V^c}_{\text{offen}}$ offen.

(2) $\left(\bigcap\limits_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcup\limits_{i \in I} \underbrace{U_i^c}_{\text{offen}}$ offen.

□

Beispiel 2.21. (1) Beliebige Vereinigung abgeschlossener Mengen muss nicht abgeschlossen sein. Z.B. $]0,1[\, = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n} \right]}_{\text{abgeschlossen}}$ ist offen.

(2) $\emptyset$ und K^n sind abgeschlossen.

(3) $A_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $A_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ abgeschlossen, dann ist auch $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ abgeschlossen.

(4) Für $a < b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b[$ weder offen noch abgeschlossen.

Satz 2.22 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen)**.** Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt

A abgeschlossen $\iff$ Ist $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = a$, dann $a \in A$.

Beweis. • „$\Longrightarrow$“: Sei A abgeschlossen und $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge in A mit

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x.$$

Ang.: $x \notin A$, d.h. $x \in A^C$. Da A^C offen, folgt, es ex. ein $\varepsilon > 0$, s.d. $K_\varepsilon(x) \subset A^C$. Mit $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ folgt, dass fast alle Folgenelemente $x^{(k)}$ in $K_\varepsilon(x) \subset A^C$ liegen.

Widerspruch zu: $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$. Damit folgt $x \in A$.

- „ $\Longleftarrow$ “: Sei $A \subset \mathbb{K}^n$ s.d. alle konvergenten Folgen in A einen Grenzwert in A haben.

  Zu zeigen: A^C offen. Sei $x \in A^C$ beliebig. Dann g.z.z.: $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $K_\varepsilon(x) \subset A^C$.

  Ang.: A^C nicht offen. Dann ex. $\forall k \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x^{(k)}$ mit $x^{(k)} \in A \cap K_{\frac{1}{k}}(x)$. Dann ist $x^{(k)} \in A\ \forall k \in \mathbb{N}$ und $\|x - x^{(k)}\| \le \frac{1}{k}$. Damit folgt

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \overset{\text{Vorr.}}{\Longrightarrow} x \in A \quad \lightning \quad \Longrightarrow A^C \text{ offen} \quad \Longrightarrow A \text{ abgeschlossen.}$$

$\square$

Definition 2.23 (Randpunkt)**.** Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt Randpunkt von M, falls in jeder Umgebung von a sowohl ein Punkt von M, als auch ein Punkt von $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$ liegt.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M, bezeichnet mit ∂M.

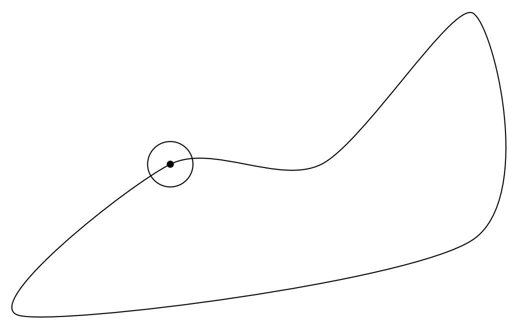


Abbildung 2.1: Randpunkt einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$

Beispiel 2.24. (1) Für $I \in \{[a,b[\,, [a,b],\ ]a,b],\ ]a,b[\,\}$ gilt $\partial I = \{a,b\}$.
$\partial[a,\infty[= \{a\}$
$\partial]a,\infty[= \{a\}$

(2) Für $K_1(0)$ gilt

$$\begin{aligned}\partial K_1(0) &= \partial\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \qquad \text{„Einheitssphäre“.}\end{aligned}$$

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, weil in jeder Umgebung eines Punktes in $\mathbb{Q}$, gibt es rationale und irrationale Zahlen. Der Rand von $\mathbb{R}$ ist leer.

Definition 2.25 (Inneres, Abschluss)**.** Sei $M \subset \mathbb{K}^n$

- Die Menge $M^\circ := M \setminus \partial M$ heißt das <u>Innere</u> von M.
- Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der <u>Abschluss</u> von M.

Satz 2.26 (Inneres ist Offen, Abschluss ist abgeschlossen)**.** Sei $M \subset \mathbb{K}^n$.

(i) Die Menge $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen. M° ist die größte offene Menge in M.

(ii) Die Menge $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.

(iii) Der Rand ∂M ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Z.z.: $M \setminus \partial M$ offen.

Sei $x \in M \setminus \partial M$ beliebig, dann ex. $\varepsilon > 0$, s.d. $K_\varepsilon(x) \subset M$ ($\implies K_\varepsilon(x) \cap M^C = \emptyset$), sonst wäre $x \in \partial M$.

Für dieses ε gilt auch $K_\varepsilon(x) \cap \partial M = \emptyset$, denn falls $z \in K_\varepsilon(x) \cap \partial M$ existiert, dann ist $K_\varepsilon(x)$ Umgebung von z und folglich $K_\varepsilon(x) \cap M^C \neq \emptyset$.

Damit folgt:

$$K_\varepsilon(x) \subset M \setminus \partial M \implies M \setminus \partial M \text{ offen.}$$

Sei $U \subset M$ offen, dann ist analog $U \cap \partial M = \emptyset$. Damit gilt $U \subset M \setminus \partial M$. Da U beliebig, folgt damit $M \setminus \partial M =: M^\circ$ ist größte offene Teilmenge von M.

(ii) Z.z.: $M \cup \partial M$ abgeschlossen.

Betrachte $M^C = \mathbb{K}^n \setminus M$. Nach Definition des Rands gilt $\partial M^C = \partial M$. Damit folgt mit (i), dass $M^C \setminus \underbrace{\partial M}_{=\partial M^C}$ offen ist. Dann

$$(M^C \setminus \partial M)^C = \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus M^C)}_{=M} \cup \partial M = M \cup \partial M.$$

D.h. $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

Sei $V \in K^n$ abgeschlossen mit $M \subset V$. Dann gilt V^C ist offen und $V^C \subset M^C$. Damit folgt mit (i):

$$\underbrace{V^C}_{\text{offen}} \subset M^C \setminus \underbrace{\partial M^C}_{=\partial M} = M^C \setminus \partial M \implies \mathbb{K}^n \setminus (M^C \setminus \partial M) = (M \cup \partial M) \subset V.$$

Da V beliebig, folgt damit $M \cup \partial M$ ist kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst.

(iii) Mit $\partial M = (M \cup \partial M) \setminus (M \setminus \partial M)$ folgt

$$\mathbb{K}^n \setminus \partial M = \underbrace{(\mathbb{K}^n \setminus (M \cup \partial M))}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(M \setminus \partial M)}_{\text{offen}}.$$

Damit ist $\mathbb{K}^n \setminus \partial M$ offen, also ∂M abgeschlossen.

□

Definition 2.27 (Kompaktheit)**.** Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Beispiel 2.28. (i) Sei

$$\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n, x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x.$$

Dann ist $A := \{x^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup x$ kompakt.

(ii) $]0,1[$ ist nicht kompakt, denn $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset]0,1[$, $\frac{1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Auch: $\left(1-\frac{2}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset]0,1[$, $1-\frac{1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 1$

Definition 2.29 (Überdeckung)**.** Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen $U_i \subset \mathbb{K}^n$ heißt Überdeckung von M, falls gilt

$$M \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Eine Überdeckung heißt offen bzw. abgeschlossen, wenn alle U_i offen bzw. abgeschlossen sind.

Satz 2.30 (Charakterisierung von Kompaktheit)**.** Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) M ist folgenkompakt

(ii) M ist beschränkt und abgeschlossen

(iii) Jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M enthält eine endliche Überdeckung von M, d.h. es existieren endlich viele Indizes $i_1,\dots,i_k \in I$, s.d. $M \subset (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k})$ (sogenannte Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel).

Beweis.

- (i) $\implies$ (ii): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ folgenkompakt. Dann existieren für alle konvergenten Folgen $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M. Damit liegt auch der Grenzwert von $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in M. Also ist M abgeschlossen.

  Ang.: M ist nicht beschränkt. Dann ex. eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Damit hat $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch zur Kompaktheit von M. Also ist M beschränkt.

- (ii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Dann folgt mit 2.9, dass alle Folgen $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ beschränkt sind und eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{j\to\infty} x$ besitzen. Da M abgeschlossen ist, folgt $x \in M$.

  Also ist M folgenkompakt.

- (iii) $\implies$ (i): Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und M besitze die Überdeckungseigenschaft. Sei weiter $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ beliebig.

  Z.z.: Es ex. eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j\to\infty} x \in M$.

  Ang.: Solche Teilfolge existiert nicht. Dann gilt: $\forall x \in M$ existiert eine offene Umgebung U_x von x, die nur endlich viele Folgenelemente von $\left(x^{(k)}\right)$ enthält (wären in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenelemente, dann existiert eine konvergente Teilfolge).

  Damit ist $M = \bigcup_{x\in M} U_x$ eine offene Überdeckung, d.h. es existiert nach Vorr. eine endliche Überdeckung von M, d.h. eine endliche Menge I mit

  $$\{x_i \mid x_i \in M, i \in I\} =: M_i \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{x_i\in M_i} U_{x_i}.$$

  Da $\forall i \in I$ U_{x_i} nur endlich viele Folgenelemente enthält, enthält M endlich viele Folgenelemente von $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \not\subset M$ ↯.

  Also existiert eine Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{k\to\infty} x \in M$

- (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei M beschränkt und abgeschlossen und sei $\{U_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M.

  Zu zeigen: Es existiert eine endliche Überdeckung von M.

  Ang.: Eine solche Überdeckung existiert nicht. Konstruiere induktiv eine Folge von beschränkten, abgeschlossenen Würfeln in $\mathbb{K}^n$:

  $$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots .$$

  mit

  (1) $M \cap Q_i$ wird nicht durch endlich viele U_{i_k} überdeckt.

  (2) Kantenlänge von $Q_m = 2^{-m}$ Kantenlänge von Q_0.

  Sei Q beschränkter abgeschlossener Würfel in $\mathbb{K}^n$ mit Kantenlänge L, s.d. $M \subset Q$. Setze

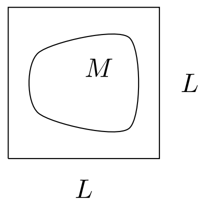
  

  Abbildung 2.2: Abgeschlossener Würfel $Q \subset K^n$ mit Kantenlänge L und $M \subset Q$

  $Q_0 = Q$, Kantenlänge von $Q_0 = L$. Sei Q_m bereits konstruiert. Sei

  $$Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n.$$

  Länge (I_k) = Kantenlänge (Q_m) $\forall k = 2^{-m}L$

  Wir zerlegen jedes I_i in 2 abgeschlossene Intervalle mit halber Länge $I_i^{(1)}$ und $I_i^{(2)}$ und setzen für $(s_1, \dots, s_n) \in \{1,2\}^n$

  $$Q_m^{s_1,\dots,s_n} := I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}.$$

  Wir erhalten 2^n Würfel mit

  $$Q_m := \bigcup_{(s_1,\dots,s_n)\in\{1,2\}^n} Q_m^{(s_1,\dots,s_n)}.$$

  Da $M \cap Q_m$ nicht von endlich vielen U_{i_k} überdeckt wird, gilt dies auch für einen Würfel

  $$Q_{m+1} := Q_m^{(s_1,\dots,s_n)}.$$

  Es gilt für die Kantenlänge $(Q_{m+1}) = \frac{1}{2}$ Kantenlänge $(Q_m) = 2^{-(m+1)}L$.

  Für $k \in \mathbb{N}$ wähle $x^{(k)} \in Q_k \cap M$. Damit ist $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$, da nach Konstruktion von $Q_1, Q_2, \dots$

  $$\|x^{(l)} - x^{(k)}\| \leq 2^{-n_0}L, \quad \forall l, k \geq n_0.$$

  Damit folgt $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \in M$ und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, weil $M \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Also existiert ein i_k, s.d. $x \in U_{i_k}$ liegt. Damit liegen fast alle Q_m in U_{i_k}. Das heißt fast alle $M \cap Q_m$ liegen in U_{i_k}. Widerspruch zur Annahme, dass eine endliche Überdeckung nicht existiert.

  Also existiert eine endliche Überdeckung von M.

$\square$

Bemerkung 2.31. Wichtige Voraussetzung für die Überdeckungseigenschaft von Heine und Borel ist, dass $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist.

In unendlich dimensionalen Banach-Räumen wie z.B.: $C[a,b]$ ist dies nicht möglich.

Korollar 2.32. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in $\mathbb{K}^n$ ist ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Wegen 2.30 ist M beschränkt. Damit ist auch $A \subset M$ beschränkt und somit nach 2.30 kompakt. □

2.3 Geometrie in K^n

Definition 2.33 (Skalarprodukt)**.** Sei V irgendein Raum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

S1 (Definitheit) $(x,x) \in \mathbb{R}$ und $(x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \iff x = 0$

S2 (Symmetrie) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

S3 (Linearität im ersten Argument) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Bemerkung 2.34. (1) Falls nur $(x,x) \in \mathbb{R}, (x,x) \geq 0$ gilt (es ist möglich, dass $(x,x) = 0$ und $x \neq 0$), dann ist $(\cdot,\cdot)$ ein „semi-skalarprodukt".

(2) Aus S2 und S3 folgt die Linearität im zweiten Argument und damit sog. Bilinearität des Skalarprodukts als eine Sesquilinearform in $\mathbb{C}$ bzw. eine Bilinearform in $\mathbb{R}$

(3) $\text{S3} \implies \begin{cases} \text{Additivität} & (x_1 + x_2, y) = (x_1,y) + (x_2,y) \\ \text{Homogenität} & (\alpha x, y) = \alpha(x,y), \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$

Lemma 2.35 (Schwarz-Ungleichung)**.** Für ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ gilt die Schwarz-Ungleichung

$$\left|(x,y)^2\right| \leq (x,x) \cdot (y,y), \quad x, y \in V$$

Beweis. $y = 0 \implies$ trivial. Sei $y \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$ beliebig.

$$0 \overset{S1}{\leq} (x + \alpha y, x + \alpha y) \overset{S2,S3}{=} (x,x) + \alpha(y,x) + \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{\alpha}(y,y)$$

Setze $\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x,x) - \frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)} - \frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)} + \frac{(x,y)}{(y,y)} \cdot \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)} \cdot (y,y) \\ &= (x,x) - \frac{\left|(x,y)^2\right|}{(y,y)} \\ \implies & 0 \leq (x,x) \cdot (y.y) - \left|(x,y)^2\right| \end{aligned}$$

□

Korollar 2.36. a) Ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf V über $\mathbb{K}$ erzeugt eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{(x,x)},\ x \in V$. Falls ein normierter Raum $(V,(\cdot,\cdot))$ vollständig ist, so heißt das Paar $(V,(\cdot,\cdot))$ Hilbert-Raum.

b) Das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_2$ auf $\mathbb{K}^n$

$$(x,y)_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

erzeugt die euklidische Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{(x,x)_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

$(\mathbb{K}^n, (\cdot,\cdot)_2)$ ist ein Hilbert-Raum.

Beweis. Normeigenschaften Definitheit und Homogenität folgen aus S1-S3. Die Dreicksungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\
&\le \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2 \\
&\overset{\text{Schwarz}}{\le} \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2 \\
\Longrightarrow \quad \|x+y\| &\le \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

□

Wichtige Ungleichungen

Lemma 2.37 (Ungleichung von Young). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$|x \cdot y| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis. Übung □

Lemma 2.38 (Ungleichung von Hölder). Seien $p, q \in \mathbb{R}, p > 1,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\underbrace{|(x,y)_2|}_{\substack{\text{euklidisches} \\ \text{Skalarprodukt}}} \le \underbrace{\|x\|_p}_{\substack{\ell_p\text{-Norm} \\ \text{von } x}} \cdot \underbrace{\|y\|_q}_{\substack{\ell_q\text{-Norm} \\ \text{von } y}}$$

Beweis. Falls $x = 0$ oder $y = 0 \implies$ klar. Sei $\|x\|_p \neq 0, \ \|y\|_q \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{|(x,y)_2|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i \overline{y_i}|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \\
&\overset{\text{Young-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^p}{p \cdot \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot \|x\|_q^q} \right) \\
&= \frac{1}{p \cdot \|x\|_p^p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{=\|x\|_p^p} + \frac{1}{q \cdot \|y\|_q^q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}_{=\|y\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
\implies |(x,y)_2| &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.39 (Ungleichung von Minkowski)**.** Sei $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ oder $p = \infty$. Dann gilt

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\rightsquigarrow$ Dreicksungleichung für die ℓ_p-Norm.

Beweis. Für $p = 1$

$$\|x+y\|_1 \overset{\text{Def. } \ell_1}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \overset{\triangle\text{-UG}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \overset{\text{Def. } \ell_1}{=} \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Für $p = \infty$

$$\|x+y\|_\infty \overset{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \overset{\triangle\text{-UG}}{\leq} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| \overset{\text{Def. } \ell_\infty}{=} \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Sei $1 < p < \infty$. Definiere $q := \frac{p}{p-1}$ $\left(\implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \right)$ und setze $\xi_i = |x_i + y_i|^{p-1}, \ i = 1, \ldots, n$ und $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\|\xi\|_q^q = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^q = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)}_{\xi_i}{}^{q=\frac{p}{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \|x+y\|_p^p$$

Dann

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i+y_i|^p}_{=\underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{\xi_i}\cdot|x_i+y_i|} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|\cdot\xi_i \\
&\le \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|\cdot\xi_i}_{|(x,\xi)_2|} + \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|\cdot\xi_i}_{|(y,\xi)_2|} \\
&\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\le} \|x\|_p\cdot\|\xi\|_q + \|y\|_p\cdot\|\xi\|_q \\
&= \Big(\|x\|_p + \|y\|_q\Big)\cdot\|\xi\|_q \\
&\overset{\text{Def. }\xi}{=} \Big(\|x\|_p + \|y\|_q\Big)\cdot\|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\overset{\text{Def. }q}{=} \Big(\|x\|_p + \|y\|_q\Big)\cdot\|x+y\|_p^{p-1} \\
\implies \|x+y\|_p &\le \|x\|_p + \|y\|_p
\end{aligned}
$$

□

Definition 2.40 (Orthogonalität)**.** $x, y \in \mathbb{K}^n$ heißen orthogonal ($x \perp y$), falls $\underline{(x,y)_2 = 0}$.

Definition 2.41 (Orthogonalsystem/Orthogonalbasis)**.** Ein Satz von Vektoren $\{a^{(1)},\dots,a^{(m)}\}$, $a^{(i)} \neq 0$, $a^{(i)} \in \mathbb{K}^n$, $i = 1,\dots,m$ und $\underbrace{(a^{(k)},a^{(l)})_2 = 0}_{\text{paarweise orthogonal}}$ für $k \neq l$ heißt Orthogonalsystem bzw. falls $m = n$ Orthogonalbasis.
Falls $(a^{(k)},a^{(k)})_2 = 1$, dann heißen die Vektoren $\{a^{(1)},\dots,a^{(m)}\}$ ein Orthonormalsystem bzw. Orthonormalbasis.

Bemerkung 2.42. Die orthogonalen Vektoren (wie in Def.) sind linear unabhängig:

$$
\text{Sei } \sum_{k=1}^m c_k a^{(k)} = 0 \iff \sum_{k=1}^m c_k (a^{(k)},a^{(l)}) \overset{\substack{a^{(i)}\\ \text{paarweise}\\ \text{orthog.}}}{=} c_l \underbrace{(a^{(l)},a^{(l)})}_{\substack{\neq 0\\ \text{für } a^{(l)}\neq 0}} = 0 \iff c_l = 0,\ l = 1,\dots,m
$$

Beispiel 2.43. $e^{(1)},\dots,e^{(n)}$ ist eine Orthogonalbasis in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.44. Sei $\{a^{(k)},\ k = 1,\dots,n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es $\forall x \in \mathbb{K}^n$ eine Darstellung

$$
x = \sum_{k=1}^n (x,a^{(k)})_2 \cdot a^{(k)},\ x \in \mathbb{K}^n.
$$

$$
\left(\begin{array}{lll}
\sim & \text{Fourierentwicklung} & \\
 & a^{(k)} \sim e^{ixk} & f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{ixk} \\
 & x \sim f(x) & \\
 & c_k \sim (f, e^{ixk})_{L^2} &
\end{array}\right)
$$

und es gilt die Vollständigkeitsrelation (Gleichung von Parseval)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|(x, a^{(k)})_2\right|^2$$

$$\left(\sim \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| \cdot 2\pi\right)$$

Beweis. $\exists\, \alpha_j,$ sodass $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a^{(j)}$

$$\Longrightarrow (x, a^{(k)})_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{(a^{(j)}, a^{(k)})_2}_{\delta_{jk}} = \alpha_k,\ k = 1, \dots, n$$

$$\Longrightarrow \text{Darstellung von } x$$

Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = (x, x)_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x, a^{(k)})_2 \cdot \overline{(x, a^{(j)})_2} \cdot \underbrace{(a^{(k)}, a^{(j)})_2}_{\delta_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} \left|(x, a^{(k)})_2\right|^2$$

$$\Longrightarrow \text{Gleichung von Parseval}$$

□

Bemerkung 2.45. Lemma 2.44 gilt in unendlichdimensionalen Skalarprodukträumen mit vollständigem Orthonormalsystem. Beispiel: Fourier-Reihen in $R[0, 2\pi]$, trigonometrische Funktionen e^{ikx} als vollständiges Orthonormalsystem.

Satz 2.46 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** Sei $\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann ist $\{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$, konstruiert durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram und Schmidt, eine Orhonormalbasis.

$$\begin{aligned}
b^{(1)} &:= \frac{a^{(1)}}{\left\|a^{(1)}\right\|_2} \\
\tilde{b}^{(k)} &:= a^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} (a^{(k)}, b^{(j)})_2 \cdot b^{(j)} \\
b^{(k)} &:= \frac{\tilde{b}^{(k)}}{\left\|\tilde{b}^{(k)}\right\|_2}, \quad k = 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Beweis. Rannacher □

2.4 Lineare Abbildungen auf dem K^n

Definition 2.47 (Lineare Abbildung). Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt linear, falls $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

Bemerkung 2.48. Eine lineare Abbildung läßt sich als Matrix darstellen. Betrachte $x \in \mathbb{K}^n$ und euklidische/kartesische Basis $e^{(i)},\ i = 1, \ldots n$. Dann $\exists!$ Darstellung von x bezüglich der Basis

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}.$$

Die Koeffizienten $x_i, i = 1, \ldots n$ sind Koordinaten. Wir definieren Koordinatenvektor $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varphi\left(e^{(i)}\right).$$

$\varphi(x)$ hat auch eine (eindeutige) Darstellung bzgl. Basis in $\mathbb{K}^m$.

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\varphi_j(x)}_{*} \cdot e^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overbrace{\varphi_j\left(e^{(i)}\right)}^{a_{ji}}\right)}_{=\varphi_j(x)} \cdot e^{(j)}$$

(*) Koordinaten von $\varphi_j(x)$ bzgl. Basis $e^{(j)}, j = 1, \ldots, m$

Dabei sind die $\varphi_j(x)$ Koordinaten und der Koordinatenvektor ist $\hat{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \cdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1\left(e^{(1)}\right) & \ldots & \varphi_1\left(e^{(n)}\right) \\ & \vdots & & \vdots \\ \varphi_m\left(e^{(1)}\right) & \ldots & \varphi_m\left(e^{(n)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

Für einen Koordinatenvektor bezüglich Basis $e^{(j)}$ gilt

$$\varphi(x) = (A\hat{x})_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \qquad j = 1, \ldots, m$$

Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lässt sich bezüglich festgelegter Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ eindeutig durch die Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreiben.

$$\hat{\varphi}(x) = A\hat{x}, \qquad x \in \mathbb{K}^n$$

Im folgenden wird der Punkt x mit seiner speziellen kartesischen Darstellung $\hat{x}$ identifiziert. Konvention: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

- Anzahl an Zeilen m = Dimension des Bildraums $\mathbb{K}^m$

- Anzahl an Spalten $n =$ Dimension des Urbildraums $\mathbb{K}^n$

Falls $m = n$ definiert $A \in K^{n\times n}$ eine lineare Abbildung in $\mathbb{K}^n$.

Lemma 2.49 (Lineare Abbildungen in $\mathbb{K}^n$)**.** Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. A ist regulär
2. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\forall b \in \mathbb{K}^n$ (Bijektivität der linearen Abbildung)
3. $Ax = 0$ hat nur eine Lösung $x = 0$ (Injektivität)
4. $Ax = b$ ist $\forall b \in \mathbb{K}^n$ lösbar (Surjektivität)
5. $\text{Rang}(A) = n$
6. $\det(A) \neq 0$
7. Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A sind ungleich Null
8. Die (komplex) transponierte Matrix $\bar{A}^T$ ist regulär.

Weitere Begriffe und Eigenschaften

- $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind **identisch** $(a_{ij} = a'_{ij}\ \forall i,j) \Leftrightarrow Ax = A'x\ \forall x \in \mathbb{K}^n$
- $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind **ähnlich**, wenn $\exists T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär, sodass
$$A' = T^{-1}AT$$
Übergang $A \to A'$ heißt Ähnlichkeitstransformation und es gilt für $z \in \mathbb{C}$
$$\begin{aligned}
\underbrace{\det(A' - z\mathbb{I})}_{\substack{\text{Charakt. Polynom für } A' \\ \text{Nullstellen = EW von } A'}} &= \det\left(T^{-1}AT - z\underbrace{T^{-1}T}_{=\mathbb{I}}\right) \\
&= \det(T^{-1}(A - z\mathbb{I})T) \\
&\overset{\det(AB)=\det(A)\det(B)}{=} \det(T^{-1})\det(A - z\mathbb{I})\det(T) \\
&\overset{\det(T^{-1})\det(T)=1=\det(\mathbb{I}))}{=} \underbrace{\det(A - z\mathbb{I})}_{\text{char. Pol. von } A}
\end{aligned}$$
Ähnliche Matrizen haben also die gleichen Eigenwerte, aber im Allgemeinen unterschiedliche Eigenvektoren.
- $n \times n$ Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ bilden einen Vektorraum.
  - **Konvergenz** von Folgen von Matrizen ist komponentenweise Konvergenz
$$A^{(k)} \to A, k \to \infty \Leftrightarrow a_{ij}^{(k)} \overset{k\to\infty}{\to} a_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots n$$
- Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Dann
$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n} \|Ax\| \text{ für } \|x\| = 1$$
ist die von $\|\cdot\|$ in $\mathbb{K}^n$ erzeugte natürliche **Matrixnorm**

- Für natürliche Matrixnorm gilt notwendig $\|\mathbb{I}\| = 1$
- Natürliche Matrixnorm ist verträglich mit $\|\cdot\|$, d.h. für $A \in K^{n\times n}$ ist $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|, x \in \mathbb{K}^n$
- und submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$ für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Beispiel 2.50. $\|A\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ heißt Frobenius-Norm. Sie ist verträglich mit $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{K}^n$ und submultiplikativ, aber keine natürliche Matrixnorm, weil $\|\mathbb{I}\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ für $n \ge 2$.

Lemma 2.51 (Natürliche Matrixnormen)**.** Die natürliche Matrixnormen zu $\|\cdot\|_\infty$ (ℓ_∞ / Maximumnorm) und $\|\cdot\|_1$ (ℓ_1-Norm) in $\mathbb{K}^n$ sind

$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \qquad \text{Maximale Zeilen-Summen-Norm}$$

$$\|A\|_1 := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \qquad \text{Maximale Spalten-Summen-Norm}$$

Beweis. 1. Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm (d.h. erfüllt Normeigenschaften (N1), (N2) und (N3))

2. Z.z. Verträglichkeit

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j|\right) \le \|x\|_\infty \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \|A\|_\infty$$

$\implies$ Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_\infty$

3. Z.Z. $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$

$$\|Ax\|_\infty = 0 \implies A = 0 \implies \|A\|_\infty = 0 = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Sei $A \neq 0$, dann $\|A\|_\infty > 0$ (Definitheit von Normen). Sei

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| \text{ für ein } m \in \{1, \dots, n\}.$$

Setze $z_j = \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}}$, falls $a_{mj} \neq 0$ und sonst $z_j = 0$. ($z_j = \operatorname{sign}(a_{mj})$). Für $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ gilt dann $\|z\|_\infty = 1$ und

$$(Az)_m = \sum_{j=1}^n a_{mj} z_j = \sum_{j=1}^n |a_{mj}| = \|A\|_\infty .$$

Es folgt

$$\|A\|_\infty = (Az)_m \le \|Az\|_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty=1} \|A\|_\infty \cdot \underbrace{\|y\|_\infty}_{=1} = \|A\|_\infty$$

$$\implies \|A\|_\infty = \sup_{\|y\|_\infty=1} \|Ay\|_\infty$$

Beweis für ℓ_1 analog. $\square$

Definition 2.52. 1. Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ = Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$$

2. $\sigma(A) = \{\lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ heißt **Spektrum** von A.

3. $\forall \lambda \in \sigma(A)\ \exists$ Eigenvektor $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$:

$$Aw = \lambda w$$

   Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den **Eigenraum** zu λ mit Dimension = **geometrische Vielfachheit** von λ.

4. Abschätzung der Eigenwerte: Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und w ein Eigenvektor zu λ mit $\|w\| = 1$. Dann $|\lambda| = |\lambda| \cdot \|w\| = \|\lambda w\| = \|Aw\| \underset{\text{Verträglichkeit}}{\leq} \|A\| \cdot \|w\| = \|A\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$

5. A heißt **hermitesch**, falls gilt

$$A = \bar{A}^T \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

   Reelle hermitesche Matrizen heißen **symmetrisch**. Für das Skalarproukt gilt

$$A = \bar{A}^T \Leftrightarrow (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2\ \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

   Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar = ähnlich zu einer Diagonalmatrix, alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. $\exists$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.

6. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, wenn gilt $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}$, $(Ax, x)_2 > 0\ \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Eine hermitesche Matrix ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv.

7. $\|\cdot\|_2$ (ℓ_2-Norm) im $\mathbb{K}^n$ erzeugt eine natürliche **Matrixnorm (Spektralnorm)** $\|\cdot\|_2$

Lemma 2.53 (Spektralnorm)**.** Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist $\bar{A}^T A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch und positiv semidefinit. Für die Spektralnorm gilt

$$\|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{|\lambda|}, \lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)\right\}$$

Sei A hermitesch, bzw. symmetrisch, dann gilt $\|A\|_2 = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$

Beweis. 1) $\bar{A}^T A$ hermitesch, denn

$$\overline{\left(\bar{A}^T A\right)^T} = \left(A^T \bar{A}\right)^T = \bar{A}^T A.$$

$\bar{A}^T A$ positiv semidefinit, denn

$$(\bar{A}^T Ax, x)_2 = (Ax, Ax)_2 = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

2) Es ist nach Definition

$$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} (Ax, Ax)_2 = \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T Ax)_2.$$

Wegen (1) ist $\bar{A}^T A$ hermitesch und positiv semidefinit, d.h. es ex. $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit U unitär und $U^T \bar{A}^T AU = D$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda \in \sigma(\bar{A}^T A)$ und $\lambda_i \geq 0$ reell.

Sei $y = \bar{U}^T x = U^{-1}x \implies x = Uy$. Damit folgt mit $|\lambda_{max}| := \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \in \sigma(\bar{A}^T A)\}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_2^2 &= \sup_{\|x\|_2=1} (x, \bar{A}^T A x)_2 \\
&= \sup_{\|Uy\|_2=1} (\underbrace{Uy}_{=x}, \bar{A}^T A \underbrace{Uy}_{=x})_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} (y, \underbrace{\bar{U}^T \bar{A}^T A U}_{=D} y)_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2=1} \underbrace{(\lambda_1 |y_1|^2 + \ldots + \lambda_n |y_n|^2)}_{=\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2} \\
&\leq \sup_{\|y\|_2=1} \sum_{i=1}^n |\lambda_{max}||y_i|^2 \\
&= |\lambda_{max}| \sup_{\|y\|_2=1} \|y\|_2^2 \\
&= |\lambda_{max}|.
\end{aligned}$$

Sei y Eigenvektor zu λ_{max} und $\|y\|_2 = 1$. Dann gilt $Dy = \lambda_{max} y$, also $(y, Dy)_2 = \lambda_{max} \underbrace{(y, y)_2}_{=1}$. Damit existiert ein y, s.d. $(y, Dy)_2 = \lambda_{max}$. Also folgt $\sup_{\|y\|_2=1} (y, Dy)_2 = \lambda_{max}$.
Damit folgt die Behauptung für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Behauptung für A hermitesch analog.

□

Definition 2.54 (orthonormale/unitäre Matrizen)**.** Eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißt **orthonormal**, wenn ihre Spaltenvektoren ein Orthonormalsystem im $\mathbb{K}^m$ bilden, d.h.

$$Q = (q_1, \ldots, q_n) \qquad q_j \in \mathbb{K}^m$$

$$(q_i, q_j)_2 = \sum_{k=1}^m q_{ik} \cdot \overline{q_{kj}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $m = n$ heißt Q unitär.

Lemma 2.55. Sei $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitär. Dann ist Q regulär, $Q^{-1} = \overline{Q}^T$ und $(Qx, Qy)_2 = (x, y)_2,\ x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2\,,\ x \in \mathbb{K}^n$$

d.h. euklidisches Skalarproukt und euklidische Norm sind invariant unter unitären Transformationen und folglich $\|Q\|_2 = \left\|Q^{-1}\right\|_2 = 1$

Beweis. 1. Z.Z. $Q^{-1} = \overline{Q}^T$

Sei $Q = (q_1, \ldots, q_n), \overline{Q}^T = \begin{pmatrix} \overline{q}_1^T \\ \vdots \\ \overline{q}_n^T \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\overline{Q}^T \cdot Q = \begin{pmatrix} \overline{q}_1^T \cdot q_1 & \ldots & \overline{q}_1^T \cdot q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{q}_n^T \cdot q_1 & \ldots & \overline{q}_n^T \cdot q_n \end{pmatrix} \overset{Q \text{ unitär}}{=} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$
\begin{aligned}
(Qx, Qy)_2 &= (x, \overline{Q}^T Qy)_2 = (x, y)_2 \\
\|Qx\|_2^2 &= (Qx, Qx)_2 = (x, x)_2 = \|x\|_2^2 \\
\|Q\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \\
\left\|Q^{-1}\right\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \left\|Q^{-1}x\right\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \left\|QQ^{-1}x\right\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.56 (Störungssatz)**.** Sei $\|\cdot\|$ beliebige natürliche Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$. Die Störungsmatrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat $\|B\| < 1$. Dann ist die Matrix $\mathbb{I} + B$ regulär und es gilt

$$\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}^n$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbb{I} + B)x\| &= \|x + Bx\| \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\geq} \|x\| - \|Bx\| \\
&\overset{\|Bx\|\leq\|B\|\|x\|}{\geq} \|x\| - \|B\| \cdot \|x\| \\
&= \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0}\|x\|
\end{aligned}
$$

Also hat die Gleichung $(\mathbb{I} + B)x = 0$ nur die Lösung $x = 0$, also ist $(\mathbb{I} + B)$ injektiv und mit 2.49 regulär. Bleibt zu zeigen: $\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
1 &= \|\mathbb{I}\| \\
&= \|(\mathbb{I} + B)(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&= \|(\mathbb{I} + B)^{-1} + B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&\overset{\text{Dreicksungl.}}{\geq} \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&\geq \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| - \|B\| \cdot \|(\mathbb{I} + B)^{-1}\| \\
&= (1 - \|B\|)\|(\mathbb{I} + B)^{-1}\|.
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 2.57. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär und $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s.d. $\|A - \tilde{A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Dann ist $\tilde{A}$ regulär.

Beweis. Es ist $\tilde{A} = \tilde{A} + A - A = (\tilde{A} - A) + A = A(\underbrace{A^{-1}(\tilde{A} - A)}_{=:B} + \mathbb{I})$. Damit folgt $\|B\| = \|A^{-1}(\tilde{A} - A)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{A} - A\| < 1$. Mit 2.56 folgt $\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A)$ regulär. Da A regulär nach Vorraussetzung, folgt $\tilde{A} = A(\mathbb{I} + A^{-1}(\tilde{A} - A))$ regulär. □

Kapitel 3

Funktionen mehrerer Variablen

Wir betrachten im Folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{K}$, mit $D \subseteq \mathbb{K}^n$, $D \neq \emptyset$ und Bildbereich $B_f \subseteq \mathbb{K}$.

Zur Erinnerung:

- Bild und Urbild. Seien $M \subseteq D$, $N \subseteq f(D)$ Teilmengen. Dann heißt

  $$f(M) := \{y \in \mathbb{K} \mid \exists x \in M\colon y = f(x)\}$$

  das Bild. Weiter heißt

  $$f^{-1}(N) := \{x \in D \mid \exists y \in N\colon f(x) = y\}.$$

  das Urbild. Dann ist $B_f = f(D)$ und $D = f^{-1}(B_f)$
- Notation. $f^{-1}(\cdot)$ meint das Mengen-Urbild, nicht eine Umkehrfunktion.

Da alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind, sind alle Aussagen unabhängig von der gewählten Norm. Standard ist die euklid. Norm.

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1 (Stetigkeit). Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn für alle Folgen $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} a$ gilt

$$f\left(x^{(k)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} f(a).$$

Die Funktion f heißt stetig in D, wenn sie für alle $x \in D$ stetig ist.

Bemerkung 3.2.
- Falls $f\colon D \to \mathbb{K}$ stetig, dann ist auch $f\colon M \to \mathbb{K}$, $M \subseteq D$ stetig.
- f stetig $\implies$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ sind stetig.

Lemma 3.3 (ε-δ-Kriterium der Stetigkeit)**.** $f\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist stetig in $a \in D$, genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.d. $\forall x \in D$ gilt

$$\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beweis. wie für $n = 1$. □

Lemma 3.4. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ stetig, dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$) stetig.

Beweis. wie für $n = 1$. □

Satz 3.5. Eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ beschränkt, d.h.

$$\exists M_K \text{ s.d. } |f(x)| \leq M_K \quad \forall x \in K.$$

Beweis. Ang.: $f(x)$ nicht beschränkt auf K. Dann gilt: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x^{(k)} \in K$ mit $|f\left(x^{(k)}\right)| > k$, d.h. $|f\left(x^{(k)}\right)| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$.

Die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt auf der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x^{(k_j)} = x \in K$.

Da f stetig, folgt $|f\left(x^{(k_j)}\right)| \xrightarrow{j\to\infty} |f(x)|$. Widerspruch zu $|f\left(x^{(k)}\right)| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. □

Satz 3.6 (Extremum)**.** Eine stetige Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ nimmt auf jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subseteq D$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. es ex. x^{max} und $x^{min} \in K$, s.d.

$$f(x^{max}) = \sup_{x\in K} f(x) =: \max_{x\in K} f(x)$$
$$f(x^{min}) = \inf_{x\in K} f(x) =: \min_{x\in K} f(x).$$

Beweis. f stetig und deshalb beschränkt auf K, d.h. es ex. obere Schranke $M := \sup\limits_{x\in K} f(x)$. Außerdem existiert eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$, s.d. $f\left(x^{(k)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} M$. Da K kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x^{(k_j)} \xrightarrow{j\to\infty} a =: x^{max} \in K$. Wegen der Stetigkeit von f, folgt aus $f\left(x^{(k_j)}\right) \xrightarrow{j\to\infty} f\left(x^{max}\right)$: $f(x^{max}) = M$. □

Bemerkung 3.7 (Anwendung von Satz 3.6)**.** Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{K}^n$, $K_1 \neq \emptyset$, $K_2 \neq \emptyset$ kompakt. Dann ist die Menge $K_1 \times K_2$ auch kompakt. Definiere $f(x, y) := \|x - y\|$, $x \in K_1$, $y \in K_2$.

$f(x, y)$ ist stetig, denn

$$|f(x, y) - f(x', y')| = |\|x - y\| - \|x' - y'\|| \overset{\Delta-\text{ungl.}}{\leq} \|x - y - x' + y'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\|.$$

$\forall x, x' \in K_1$ und $\forall y, y' \in K_2$ mit $\|x - x'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|y - y'\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ gilt

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$$

Also ist $f(x,y)$ stetig auf $K_1 \times K_2$. Mit 3.6 folgt damit: $\exists a \in K_1$, $b \in K_2$, s.d.

$$\|a - b\| = \inf_{x \in K_1 y \in K_2} \|x - y\| =: d(K_1, K_2) \quad \text{Abstand zwischen Mengen } K_1 \text{ und } K_2.$$

Im Fall $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, gilt $d(K_1, K_2) > 0$. Falls $K_1 = \{a\}$, dann heißt $b \in K_2$ die Projektion des Punktes a auf K_2 (diese ist im Allg. nicht eindeutig bestimmt).

Definition 3.8 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, s.d.

$$\forall x, y \in D\colon \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 3.9. Eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ ist auf einer kompakten Menge $K \subseteq D$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Ang. f nicht gleichmäßig stetig. Dann $\exists \varepsilon > 0$, s.d. $\forall k \in \mathbb{N}$, ex. Punkte $x^{(k)}$ und $y^{(k)} \in K$, s.d.

$$\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k} \text{ und } \left|f\left(x^{(k)}\right) - f\left(y^{(k)}\right)\right| > \varepsilon.$$

Da K kompakt, ex. eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} x^{(k_j)} = x \in K$. Wir haben $\|x^{(k)} - y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$, also

$$\|x^{(k_j)} - y^{(k_j)}\| < \frac{1}{k^j} \implies \lim_{j \to \infty} y^{(k_j)} = x = \lim_{j \to \infty} x^{(k_j)}.$$

Da f stetig, folgt

$$\left|f\left(x^{(k_j)}\right) - f\left(y^{(k_j)}\right)\right| \xrightarrow{j \to \infty} |f(x) - f(x)| = 0.$$

Widerspruch zu $\left|f\left(x^{(k)}\right) - f\left(y^{(k)}\right)\right| > \varepsilon$. □

Definition 3.10 (Konvergenz von Funktionenfolgen)**.** Sei $f_k\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert

- punktweise gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$, falls $\forall x \in D$ gilt $f_k(x) \xrightarrow{k \to \infty} f(x)$.
- gleichmäßig, falls $\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \to \infty} 0$.

Satz 3.11 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** Sei $f_k\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig, $f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ gleichmäßig mit $f\colon D \to \mathbb{K}$. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ s.d. $\sup\limits_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Da f_n stetig, ex. $\delta > 0$, s.d. $\forall y \in D$ gilt: $\|x - y\| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Dann gilt $\forall x, y \in D$ mit $\|x-y\| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig in x. □

Bemerkung 3.12. Analoge Sätze gelten allgemein für Funktionen auf kompakten Mengen in normierten $(V, \|\cdot\|)$ oder metrischen $(X, d(\cdot,\cdot))$ Räumen.

Definition 3.13 (Offene, abgeschlossene Menge bzgl. einer Obermenge aus $\mathbb{K}^n$).

1) Eine Teilmenge $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt <u>relativ - offen</u> bzgl. G, falls $\forall a \in M$:

$$\exists \text{ Kugelumgebung } K_r(a) \text{ s.d. } (K_r(a) \cap G) \subset M$$

2) $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt <u>relativ-abgeschlossen</u> (bzgl. G), falls $(M^C \cap G) \subset G$ relativ-offen bzgl. G ist.

3) Eine Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt <u>zusammenhängend</u>, falls *keine* relativ-offene Zerlegung $G = U \cup V$ mit $U, V \neq \emptyset$ und $\overline{U \cap V = \emptyset}$ existiert.

4) Eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt Gebiet.

Beispiel 3.14. Einheitssphäre $S_1(0) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Als Teilmenge in $\mathbb{K}^n$ ist $S_1(0)$ abgeschlossen.
Sei $M \subset \mathbb{K}^n$ und offen: Dann ist $M \cap S_1(0)$ als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ weder offen noch abgeschlossen; als Teilmenge in $S_1(0)$ ist $M \cap S_1(0)$ relativ-offen bzgl. $S_1(0)$.
Extrembeispiel: $M = S_1(0)$ ist als Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ abgeschlossen, aber bzgl. $S_1(0)$ relativ-offen und relativ-abgeschlossen.

- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, offen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-offen bzgl. G.
- $M \cap G$ ($M \subset \mathbb{K}^n$, abgeschlossen), $G \subset \mathbb{K}^n$, ist immer relativ-abgeschlossen bzgl. G.

Lemma 3.15. Sei $f : \overline{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig. Dann gilt:

1) Das Urbild $f^{-1}(O)$, wobei $O \subset f(D)$ relativ-offen, ist relativ-offen in D.
2) Das Urbild $f^{-1}(A)$, wobei $A \subset f(\overline{D})$ abgeschlossen, ist abgeschlossen.
3) Das Bild $f(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, ist kompakt.
4) Das Bild $f(G)$, wobei $G \subset D$ zusammenhängend, ist zusammenhängend.

Beweis.

1) Sei $O \subset f(D)$ eine relativ-offene Menge. Für O gilt: $\forall f(a) \in O$ $\exists$ relative Kugelumgebung in O:

$$(K_\varepsilon(f(a)) \cap f(D)) \subset O \text{ für ein } \varepsilon > 0.$$

f stetig in $a \implies$ für dieses ε $\exists \delta > 0$ s.d. für $K_\delta(a) \cap D$ gilt $f(K_\delta(a) \cap D) \subset (K_\varepsilon(f(a)) \cap f(D)) \subset O \implies \forall a \in D$ (mit $f(a) \in O$) gilt

$$(K_\delta(a) \cap D) \subset f^{-1}(O) \implies f^{-1}(O)$$

relativ-offen.

2) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $f^{-1}(A)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in \overline{D}$. Aufgrund der Stetigkeit von f konvergiert die Bildfolge $\left(f\left(x^{(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{f\left(x^{(k)}\right)}_{\in A} = f(x)$. Da A abgeschlossen ist, gilt wegen der Charakterisierung über Folgenkonvergenz auch $f(x) \in A \implies x \in f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

3) **Z.Z** $f(K) \subset \mathbb{K}$ beschränkt und abgeschlossen ($\implies$ kompakt).

- Die Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit von stetigen Funktionen auf kompakten Mengen.
- Abgeschlossenheit: Sei $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = y \in \mathbb{K}$. Die Urbildfolge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \left(= \underbrace{f^{-1}\left(y^{(k)}\right)}_{\text{Urbild von } y^{(k)}} \right)$ in K hat aufgrund der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x^{(k_j)} = x \in K$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \underbrace{f\left(x^{(k_j)}\right)}_{=y^{k_j}} = y \implies y \in f(K) \implies f(K)$ abgeschlossen.

4) Ann: $f(G)$ nicht zusammenhängend. Nach Definition existieren dann $U, V \in \mathbb{K}^n$, $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, relativ offen, s.d. $f(G) = U \cup V$. Für die Urbildmengen gilt also

$$U' = \{x \in G | f(x) \in U\},\ V' = \{x \in G | f(x) \in V\},\ U' \cap V' = \emptyset, U' \neq \emptyset, V' \neq \emptyset,$$

nach 1) sind U' und V' relativ offen und $G = U' \cup V'$

$$\implies G \text{ nicht zusammenhängend } ↯$$
$$\implies f(G) \text{ zusammenhängend.}$$

□

Satz 3.16 (Zwischenwertsatz)**.** Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig und D zusammenhängend. Dann nimmt f für alle $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Insbesondere hat f eine Nullstelle in D, falls $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Beweis. Wegen Lemma 3.15 ist der Bildbereich $f(D) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend.
Z.Z. $f(D)$ ist ein (zusammenhängendes) Intervall.
Annahme: $f(D)$ ist kein Intervall $\implies \exists f(x), f(y) \in f(D)$ und $z \notin f(D)$ zwischen $f(x)$ und $f(y)$. Dann sind die Mengen

$$U := f(D) \cap (-\infty, z),\ V := f(D) \cap (z, \infty)$$

disjunkt, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, U, V sind relativ-offen bzgl. $f(D)$ und $U \cap V = f(D)$

$$\implies f(D) \text{ nicht zusammenhängend } ↯.$$

□

3.2 Vektor- und Matrixwertige Funktionen

$$
\begin{aligned}
f :& D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\
f :& D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{r\times s} \\
f :& D \subset \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}^{r\times s}
\end{aligned}
$$

- Mit Hilfe von Normen in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m\times n}$ sind die Definitionen von Stetigkeit etc. übertragbart auf Vektor- und Matrixwertige Funktionen. $\implies$ solche stetigen Abbildungen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig und beschränkt.
- $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ stetig $\Leftrightarrow$ alle Komponenten $f_i : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ i = 1, \dots, m$ sind stetig (genauso für $f : D \subset \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{K}^{r\times s}$ etc.)

Lemma 3.17. Seien $g : D \subset \mathbb{K}^n \to B \subset \mathbb{K}^m$ und $f : B \to \mathbb{K}^r$ stetig. Dann ist die Komposition $f \circ g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^r$ stetig.

Beweis. Sei $x \in D,\ x^{(k)} \subset D$ s.d. $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
g \text{ stetig } &\implies y^{(k)} = g(x^{(k)}) \underset{k\to\infty}{\to} g(x) =: y \\
f \text{ stetig } &\implies (f \circ g)\left(x^{(k)}\right) = f\left(g\left(x^{(k)}\right)\right) = f(y^{(k)}) \underset{k\to\infty}{\to} f(y)
\end{aligned}
$$

Also ist $(f \circ g)$ stetig. □

Lemma 3.18. Sei $D \subset \mathbb{K}^n$ kompakt und $f : D \to B \subset \mathbb{K}^n$ injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$ stetig.

Beweis. Sei $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B mit $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = y \in B$.
Z.Z. $\underbrace{f^{-1}\left(y^{(k)}\right)}_{=:x^{(k)}} \underset{k\to\infty}{\to} \underbrace{f^{-1}(y)}_{=:x}$ ($\implies$ f^{-1} stetig), d.h. $x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} x$.
Die Folge $\left(x^{(k)}\right) \subset D$ ist aufgrund der Beschränktheit von D auch beschränkt, also existiert eine konvergente Teilfolge $\left(x^{(k_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x^{(k_j)} = \xi \in D$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x^{(k_j)}) \underset{j\to\infty}{\to} f(\xi)$. Außerdem gilt

$$
f\left(x^{(k_j)}\right) = y^{(k_j)} \underset{j\to\infty}{\to} y \implies y = f(\xi) \overset{y=f(x)}{\underset{f \text{ injektiv}}{\implies}} x = \xi.
$$

Also konvergieren alle konvergenten Teilfolgen von $\left(x^{(k)}\right)$ gegen $x \implies x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} x$. □

3.2.1 Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation: Es sei ein quadratisches Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_n) &= b_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) &= b_n, \end{aligned}$$

eine Vektorform $f(x) = b$ und ein $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben, s.d.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n.$$

Ziel: $x = f^{-1}(b)$ finden als Grenzwert einer Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Ansatz: Definiere $g(x) := x - \sigma(f(x) - b)$ für ein $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und suche Fixpunkt von $g\colon D \to \mathbb{K}^n$ $(x = g(x))$.

Fixpunktiteration: Startwert $x^{(0)}$. Iterationsschritt

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls f stetig, dann ist auch g stetig. Damit folgt, falls $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$, dann $g\left(x^{(k-1)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} g(x)$. Damit folgt

$$\underbrace{x^{(k)}}_{\xrightarrow{k\to\infty} x} = \underbrace{g\left(x^{(k-1)}\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} g(x)}.$$

Für $k \to \infty$, folgt also $x = g(x)$, also ist x Fixpunkt. Damit folgt $x = g(x) = x - \sigma(f(x) - b) \implies f(x) = b$.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Fixpunktiteration?

Definition 3.19 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Eine Funktion $g\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante $L < \infty$ existiert, s.d.

$$\|g(x) - g(y)\| \le L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D.$$

Falls $L < 1$ heißt g Kontraktion (bezügl. Norm $\|\cdot\|$).

Satz 3.20 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Sei $g\colon D \subseteq \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion mit den Eigenschaften

1) $g(M) = M$ für ein $M \subseteq D$, M abgeschlossen
2) g ist Kontraktion auf M, d.h. $\exists L < 1$, s.d. $\|g(x) - g(y)\| \le L\|x - y\|$, $\forall x, y \in M$.

Dann gilt

(i) Es existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in M$ von g.

(ii) $\forall x^{(0)} \in M$ ist die Iterationsfolge $x^{(k)} = g\left(x^{(k-1)}\right)$ wohldefiniert $(x^{(k)} \in M)$ und $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

(iii) Es gilt die Abschätzung:
$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Beweis. (i) Seien $x, x' \in M$ zwei Fixpunkte. Dann
$$\|x - x'\| = \|g(x) - g(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$
Damit folgt
$$\underbrace{(1-L)}_{>0}\underbrace{\|x - x'\|}_{\geq 0} \leq 0 \implies \|x - x'\| = 0 \implies x = x'.$$

(ii) $g(M) = M \implies x^{(k)} = g\left(x^{(k-1)}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ ist wohldefiniert, d.h. $x^{(k)} \in M$, $\forall k \in \mathbb{N}$, falls $x^{(0)} \in M$.

Z.z.: $x^{(k)}$ konvergiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} \in M$, also g.z.z.: $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.
$$\begin{aligned}
\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \left\|g\left(x^{(k)}\right) - g\left(x^{(k-1)}\right)\right\| \\
&\leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\
&= L\left\|g\left(x^{(k-1)}\right) - g\left(x^{(k-2)}\right)\right\| \\
&\leq L \cdot L \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\| \\
&\leq \underbrace{L \cdot \ldots \cdot L}_{k}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&= L^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\|
\end{aligned}$$
Seien k, m beliebig. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$
$$\begin{aligned}
\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + x^{(k+m-1)} - \ldots x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \ldots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= L^{m-1}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + L^{m-2}\|x^{k+1} - x^{k}\| + \ldots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= \left(L^{m-1} + L^{m-2} + \ldots + 1\right)\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&= \frac{1-L^m}{1-L}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq \frac{1-L^m}{1-L}L^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&\leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&\overset{L<1}{<} \varepsilon \qquad \text{für } k \text{ groß genug.}
\end{aligned}$$
Also ist $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M und es existiert ein $x^* \in M$, s.d. $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^* konvergiert. x^* ist ein Fixpunkt von g, weil
$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} g\left(x^{(k-1)}\right) \overset{g \text{ stetig}}{=} g\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}\right) = g(x^*).$$

(iii) Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt
$$\|\underbrace{x^{(k+m)}}_{\xrightarrow{m\to\infty} x^*} - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \implies \|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

$\square$

Bemerkung 3.21. Für den Beweis ist wichtig, dass der grundlegende Raum vollständig ist, d.h. dass alle Cauchy-Folgen in diesem Raum konvergieren.

Bemerkung 3.22 (Anwendung: Lineare Gleichungssysteme)**.** $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär und $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Da A regulär, hat das LGS $Ax = b$ genau eine Lösung $x^* = A^{-1}b$. Sei $g(x) := x - \sigma(Ax - b)$ mit $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Fixpunktiteration $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \sigma(Ax^{(k-1)} - b)$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, wenn g kontraktiv ist. Zum Beispiel in ℓ_2:

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\|_2 &= \|x - \sigma(Ax - b) - y + \sigma(Ay - b)\|_2 \\
&= \|x - y - \sigma A(x - y)\|_2 \\
&= \|(\mathbb{I} - \sigma A)(x - y)\|_2 \\
&\le \|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 \|x - y\|_2,
\end{aligned}$$

d.h. g kontraktiv, falls $|\mathbb{I} - \sigma A\|_2 < 1$.

Frage: Wahl von σ? Wähle $\sigma = \|A\|_\infty^{-1} = \frac{1}{\|A\|_\infty}$, falls A hermitesch und positiv definit (= „Richardson Iteration“). Zu überprüfen $\left\|\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}\right\|_2 < 1$. Da A positiv definit und hermitesch, sind alle Eigenwerte $\lambda > 0$. Es gilt $\forall$ EW: $0 < \lambda \le \|A\|_\infty$. Für EW von $\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}$ gilt $\mu = 1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}$, λ Eigenwert von A. Also $0 \le \underbrace{1 - \frac{\lambda}{\|A\|_\infty}}_{=\mu} < 1$, mit 2.53 folgt $\left\|\underbrace{\mathbb{I} - \frac{A}{\|A\|_\infty}}_{\text{hermitesch}}\right\|_2 < 1$. Falls A hermitesch und positiv definit, ist also die Richardson Iteration konvergent.

> **Definition 3.23** (Starke Monotonie)**.** Eine Funktion $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt stark monoton, wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, s.d. $\forall x, y \in D$ gilt
>
> $$(f(x) - f(y), x - y)_2 \ge m\|x - y\|_2^2.$$

Bemerkung 3.24 (Anwendung: Nichtlineare Gleichungssysteme)**.** Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit L und stark monoton mit $m > 0$. Betrachte $f(x) = b$, $g(x) := x - \theta(f(x) - b)$.

Frage: Wahl von θ, s.d. $\forall x^{(0)} \in D$ die Fixpunktiteration konvergiert? Es ist

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\|_2^2 &= \|x - \theta(f(x) - b) - y + \theta(f(y) - b)\|_2^2 \\
&= \|x - y - \theta(f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&= \|x - y\|_2^2 - 2\theta(x - y, f(x) - f(y))_2 + \theta^2\|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
&\le \|x - y\|_2^2 - 2\theta m\|x - y\|_2^2 + \theta^2 L^2\|x - y\|_2^2 \\
&= (1 - 2\theta m + \theta^2 L^2)\|x - y\|_2^2.
\end{aligned}$$

Die Fixpunktiteration konvergiert, falls $1 - 2\theta m + \theta^2 L^2 < 1$, d.h. für $\theta \in \left(0, \frac{2m}{L^2}\right)$. Dann existiert ein $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ mit $g(x^*) = x^*$. Ist x^* eindeutig? Seien x, x' zwei Lösungen. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= (\underbrace{f(x) - b + b - f(x')}_{=0}, x - x')_2 \\
&= (f(x) - f(x'), x - x')_2 \\
&\overset{f \text{ stark monoton}}{\ge} m\|x - x'\|_2^2 \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Also $x = x'$, damit ist x^* eindeutig.

Kapitel 4

Differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Betrachte die Abbildung $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Die Stetigkeitsdefinition von f entspricht der Stetigkeit von f in $\mathbb{R}$. Aber: Differenzierbarkeit einer Funktion $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g'(x_0) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ nicht sinnvoll.

4.1 Partielle Differenzierbarkeit

Definition 4.1 (Partielle Ableitung)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$.

- f heißt im Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar nach i-ter Koordinatenrichtung, falls der Grenwert
$$\partial_i f(x) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x + h \cdot e^{(i)}\right) - f(x)}{h}.$$
existiert mit $e^{(i)} \coloneqq i$-te Spalte der $n \times n$ Einheitsmatrix. Schreibweise auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.
- f heißt partiell differenzierbar in $x \in D$, falls $\partial_i f(x)$ für alle $1 \leq i \leq n$ existieren.
- Sind $\partial_i f(x)$ $\forall i$ stetig, dann heißt f stetig partiell differenzierbar.
- Falls $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann heißt f (stetig) partiell differenzierbar, falls alle Komponentenfunktionen f_j $(1 \leq j \leq m)$ (stetig) partiell differenzierbar in $x \in D$ sind, d.h. wenn $\partial_i f_j(x)$ $\forall i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ existieren.

Bemerkung 4.2 (Interpretation als gewöhnliche Ableitung)**.** Sei $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Definiere $\tilde{f}(\xi) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$, d.h. $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fest. Dann ist

$$\partial_i f(x) = \frac{\mathrm{d}\tilde{f}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}.$$

D.h. für partielle Ableitungen gelten analoge Regeln, wie für die gewöhnliche Ableitung, insbesondere Produktregel, Quotientenregel und auch Kettenregel.

Beispiel 4.3. Die Funktion

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

ist in $D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_i r(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \overset{\text{gew. Kettenregel}}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Sei $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktion. Dann ist $f(x) = F(r(x))$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert und partiell differenzierbar.

$$\partial_i f(x) = \frac{\mathrm{d}F\,(r(x))}{\mathrm{d}y} \partial_i r(x) = F'(r(x)) \frac{x_i}{\|x\|_2} = F'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)}.$$

Bemerkung 4.4. Für $n = 1$ gilt: f differenzierbar $\implies$ f stetig. Für $n > 1$ und f partiell differenzierbar, folgt i.A. nicht, dass f stetig ist.

Satz 4.5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Für $x \in D$ gelte: $\exists K_r(x) \subseteq D$, s.d. die partiellen Ableitungen $\partial_i f(y)$, $i = 1, \ldots, n$ beschränkt sind $\forall y \in K_r(x)$, d.h.

$$\sup_{y \in K_r(x)} |\partial_i f(y)| \leq M, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt f stetig in Punkt x.

Beweis. Sei $n = 2$ und $y = (y_1, y_2) \in K_r(x)$. Es ist

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Mit y_2 fest, folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi = \xi(y_2)$ zwischen y_1 und x_1, also

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) \overset{\text{MWS}}{=} \partial_1 f(\xi, y_2)(y_1 - x_1)$$

Analog für x_1 fest und $\eta(x_1)$ zwischen y_2 und x_2

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) \overset{\text{MWS}}{=} \partial_2 f(x_1, \eta)(y_2 - x_2)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \underbrace{|\partial_1 f(\xi, y_2)|}_{\leq M} |y_1 - x_1| + \underbrace{|\partial_2 f(x_2, \eta)|}_{\leq M} |y_2 - x_2| \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \\ &= M\|y - x\|_1. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon \in (0, r]$ beliebig, dann gilt für $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$

$$\|y - x\|_1 \leq \delta \implies |f(y) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Also f stetig in x und wegen $|f(y) - f(x)| \leq M\|y - x\|_1$ sogar Lipschitz-stetig. Für $n > 2$ analog. $\square$

Definition 4.6. Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit $\partial_i f\colon D \to \mathbb{R}$.

- Falls $\partial_i f$ partiell differenzierbar sind, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung
$$\partial_i \partial_j f(x) \coloneqq \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right).$$
- f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung von f existieren und stetig sind.

Bemerkung 4.7. Im Allgemeinen ist $\partial_i \partial_j f(x) \neq \partial_j \partial_i f(x)$!

Satz 4.8 (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $K_r(x) \subseteq D$ eines Punktes $x \in D$. Dann gilt
$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x), \qquad \forall i, j = 1, \dots, n.$$
Allgemein: Für eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar.

Beweis. 1) Sei $n = 2$ und
$$A \coloneqq \underbrace{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2)}_{=\varphi(x_1+h_1)} - \underbrace{f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2)}_{=\varphi(x_1)}.$$

Definiere $\varphi(x) \coloneqq f(x, x_2+h_2) - f(x, x_2)$. Dann ist $A = \varphi(x_1+h_1) - \varphi(x_1)$. Mit dem MWS bezügl. x_1 folgt
$$\varphi(x_1+h_1) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1+\theta_1)\cdot h_1, \quad \theta_1 \in (0, h_1)$$
Für φ' gilt
$$\begin{aligned}\varphi'(x_1) &= \partial_1 f(x_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2)\\ &\overset{\text{MWS bezügl. } x_2}{=} \partial_2(\partial_1 f(x_1, x_2+\theta_1'))\cdot h_2, \quad \theta_1' \in (0, h_2)\end{aligned}$$
Dann folgt
$$\varphi'(x_1+\theta_1) = \partial_2(\partial_1 f(x_1+\theta_1, x_2+\theta_1'))h_2.$$
Und damit ist
$$A = \varphi'(x_1+\theta_1)h_1 = \partial_2(\partial_1 f(x_1+\theta_1, x_2+\theta_1'))\cdot h_1 \cdot h_2$$
Analog definiere $\psi(x) \coloneqq f(x_1+h_1, x) - f(x_1, x)$, dann
$$\begin{aligned}A &= \psi(x_2+h_2) - \psi(x_2)\\ &\overset{\text{wie oben}}{=} h_2 \psi'(x_2+\theta_2)\\ &= h_1 \cdot h_2 \partial_1(\partial_2 f(x_1+\theta_2, x_2+\theta_2')), \quad \theta_2 \in (0, h_1), \theta_2' \in (0, h_2).\end{aligned}$$
Also folgt
$$\partial_2 \partial_1 f(x_1+\theta_1, x_2+\theta_1') = \frac{A}{h_1 \cdot h_2} = \partial_1 \partial_2 f(x_1+\theta_2, x_2+\theta_2').$$

Die partiellen Ableitungen $\partial_2\partial_1 f$ und $\partial_1\partial_2 f$ sind stetig in $K_r(x)$, also gilt für $h_1, h_2 \to 0$, d.h. $x_1 + \theta_1 \to x_1, x_2 + \theta_1' \to x_2, \ldots$

$$\partial_2\partial_1 f(x_1+\theta_1, x_2+\theta_1') \xrightarrow{h_1,h_2\to 0} \partial_2\partial_1 f(x)$$
$$\partial_1\partial_2 f(x_1+\theta_2, x_2+\theta_2') \xrightarrow{h_1,h_2\to 0} \partial_1\partial_2 f(x).$$

Also $\partial_1\partial_2 f(x) = \partial_2\partial_1 f(x)$. Für $n > 2$ analog.

2) Sei f k-mal stetig differenzierbar. Dann folgt durch Induktion nach k

$$\partial_1 \ldots \partial_k f(x) = \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x).$$

für jede Permutation $(i_1, \ldots, i_k)$ von $(1 \ldots k)$.

□

Definition 4.9 (Begriffe der Vektoranalysis).

- Gradient: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt der Gradient von f in $x \in D$.

- Hesse-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die Matrix

$$H_f(x) := \nabla^2 f(x) := (\partial_i\partial_j f(x))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in D$.

- Jacobi-Matrix: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Vektorfunktion. Die Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

heißt Funktionalmatrix oder auch Jacobimatrix von f in $x \in D$.
Schreibweise: $J_f(x) = f'(x) = (\nabla f(x))^T$.

Beispiel 4.10. $r(x) = \|x\|_2$.

$$\nabla r(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \partial_i r(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Für die Hesse-Matrix $\nabla^2 r(x) = \left(\partial_j \frac{x_i}{r(x)}\right)_{i,j=1}^n$ folgt

$$\partial_j \left(\frac{x_i}{r(x)}\right) = \begin{cases} \frac{r(x) - x_i \frac{x_i}{r(x)}}{r(x)^2} = \frac{1}{r(x)} - \frac{x_i^2}{r(x)^3} & i = j \\ -\frac{x_i \frac{x_j}{r(x)}}{r(x)^2} = -\frac{x_i x_j}{r(x)^3} & i \neq j \end{cases}.$$

Diese Hesse-Matrix ist die Jacobi-Matrix der Vektorfunktion $v(x) = \frac{x}{r(x)} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{x_i}{r(x)} \\ \vdots \end{pmatrix}$.

4.2 Totale Differenzierbarkeit

Erinnerung (Analysis 1) $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, ist genau dann in $x \in D$ differenzierbar, falls f in x „gut“ linear approximierbar ist, d.h. $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $f(x+h) = f(x) + a \cdot h + w(h)$ wobei $\lim\limits_{h\to 0} \frac{w(h)}{|h|} = 0$ $(f'(x) = a)$.

Definition 4.11 (total differenzierbar)**.** Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt im Punkt $x \in D$ (total) differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, sodass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x) - A\cdot h}{\|h\|} = 0 \tag{4.1}$$

Oft wird (4.1) durch eine Bedingung an den Rest $\omega(h)$, $\omega\colon D \to \mathbb{R}^m$ definiert:

$$f(x+h) = f(x) + A\cdot h + \omega(h),$$

wobei $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0$ $(\Leftrightarrow (4.1), \Leftrightarrow \omega(h) = o(\|h\|))$. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^m$ äquivalent sind, ist es gleichgültig, welche Norm man in (4.1) verwendet.

A heißt das Differential von f im Punkt x. Schreibweise:

$$\mathrm{d}f(x),\ \mathrm{d}f\Big|_x,\ \mathrm{d}f_x,\ Df(x),\ Df\Big|_x,\ Df_x,\ \mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0},\ Df(x_0).$$

Bemerkung 4.12. Für $n = m = 1$ ist die Definition der totalen Ableitung äquivalent zur Definition der Ableitung von Funktionen einer Variablen.

Satz 4.13 (Differenzierbarkeit)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ gilt:

1) Sei f in $x \in D$ differenzierbar, dann ist f partiell differenzierbar und $Df(x) = J_f(x)$, $J_f(x)$ Jacobi-Matrix
2) Sei f partiell differenzierbar in einer Umgebung von $x \in D$ und die partiellen Ableitungen stetig in x, dann ist f differenzierbar in x.

Beweis. $n = 2$ und $m = 1$.

1) Sei f differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h_i\to 0} \frac{f(x + h_i\cdot e^{(i)}) - f(x)}{h_i} &= \lim_{h_i\to 0}\left(Df(x)\cdot e^{(i)} + \frac{\omega(h_i)}{h_i}\right)\\
&= Df(x)\cdot e^{(i)} + \underbrace{\lim_{h_i\to 0}\frac{\omega(h_i)}{h_i}}_{\to 0}\\
&= Df(x)\cdot e^{(i)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f \text{ partiell differenzierbar und } Df(x)e^{(i)} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_m \end{pmatrix} \Longrightarrow Df(x) = J_f(x).$$

2) Sei f stetig partiell differenzierbar und $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$$

$\exists \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &\overset{\text{MWS}}{=} h_2 \partial_2 f(x_1+h_1, x_2+\theta_2 \cdot h_2) + h_1 \partial_1 f(x_1+\theta_1 \cdot h_1, x_2) \\ &= h_2(\partial_2 f(x_1,x_2) + w_2(h_1,h_2)) + h_1(\partial_1 f(x_1,x_2) + w_1(h_1,h_2)), \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_1(h_1,h_2) = \partial_1 f(x_1+\theta_1 h_1, x_2) - \partial_1 f(x_1,x_2)$$

und

$$\omega_2(h_1,h_2) = \partial_2 f(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) - \partial_2 f(x_1,x_2).$$

$\partial_1 f(x), \partial_2 f(x)$ stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \omega_1(h_1,h_2) = 0,\ \lim\limits_{h\to 0} \omega_2(h_1,h_2) = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= h_1 \partial_1 f(x) + h_2 \partial_2 f(x) + h_1 \omega_1(h) + h_2 \omega_2(h) \\ &= (\partial f_1(x), \partial f_2(x)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + (\omega_1(h), \omega_2(h)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= Df(x) \cdot h + \tilde{\omega}(h) \end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|\tilde{\omega}(h)\|}{\|h\|} = 0$. Also ist f differenzierbar und $Df(x) = \nabla^T f(x)$.

□

Korollar 4.14. stetig partiell differenzierbar $\Longrightarrow$ (total) differenzierbar $\Longrightarrow$ partiell differenzierbar. Die umgekehrten Implikationen gelten im Allgemeinen nicht.

Lemma 4.15 (Richtungsableitung)**.** Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ differenzierbar. Dann gilt $\forall v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ existiert die Ableitung in Richtung v (sog. Richtungsableitung)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = (\nabla f(x), v)_2$$

Beweis. Sei $x \in D$ und definiere die Funktion $\xi(t) := x + tv$. $\xi(t) \in D$ für $t \in [0,\varepsilon)$ für genügend kleine $\varepsilon > 0$. Betrachte die Komposition $h := f \circ \xi : [0,\varepsilon) \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x) &\overset{\text{Def. Richtungsabl.}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \\ &\overset{\text{Def. Abl.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+tv)\Big|_{t=0} \\ &\overset{f(x+tv)=(f\circ\xi)(t)}{=} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \\ &= h'(0) \end{aligned}$$

Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot \xi_i'(t) \\
\implies h'(0) &\overset{\xi(0)=x+0\cdot v}{\underset{\xi_i'(t)=v_i}{=}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i \\
&= (\nabla f(x), v)_2
\end{aligned}
$$

□

Korollar 4.16. Sei $\nabla f(x) \neq 0$. Dann ist der Winkel θ zwischen zwei Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\cos(\theta) = \frac{(\nabla f(x), v)_2}{\|\nabla f(x)\|_2 \cdot \|v\|_2}.$$

Damit gilt für $\|v\|_2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) \overset{\text{Lemma 4.15}}{=} (\nabla f, v)_2 = \|\nabla f(x)\|_2 \cdot \|v\|_2 \cdot \cos(\theta) \overset{\|v\|_2=1}{=} \|\nabla f(x)\|_2 \cdot \cos(\theta)$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ wird maximal, wenn $\cos(\theta) = 1$, also wenn v und $\nabla f(x)$ die gleiche Richtung haben: d.h. der Vektor $\nabla f(x)$ ist die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt x.

Bemerkung 4.17.

1. Es gibt Funktionen, für welche alle Richtungsableitungen existieren, die aber dennoch nicht (total) differenzierbar sind.

2. Es gibt Funktionen, die stetig und partiell differenzierbar, aber nicht (total) differenzierbar sind.

Satz 4.18 (Kettenregel)**.** Seien $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $D_g \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g\colon D_g \to \mathbb{R}^n, f : D_f \to \mathbb{R}^r$ Abbildungen. Falls g im Punkt $x \in D_g$ und f im Punkt $y = g(x) \in D_f$ differenzierbar sind, gilt: Die Komposition $h = f \circ g$ ist im Punkt x differenzierbar und

$$\underbrace{D_x h(x)}_{\in \mathbb{R}^{r\times m}} = \underbrace{D_y f(g(x))}_{\in \mathbb{R}^{r\times n}} \underbrace{D_x g(x)}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}}$$

Beweis. Seien $x \in D_g$ und $y = g(x) \in D_f$. Dann gilt nach Voraussetzungen

$$g(x+\xi) = \underbrace{g(x)}_{=:y} + \underbrace{D_x g(x)\xi + \omega_g(\xi)}_{=:\eta} \qquad \text{mit} \lim_{\substack{x+\xi\in D_g \\ \|\xi\|\to 0}} \frac{\|\omega_g(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

$$f(y+\eta) = f(y) + D_y f(y)\eta + \omega_f(\eta) \qquad \text{mit} \lim_{\substack{x+\eta\in D_f \\ \|\eta\|\to 0}} \frac{\|\omega_f(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x+\xi) &= f(g(x+\xi)) \\
&\overset{g(x+\xi)=g(x)+\eta=y+\eta}{=} f(y+\eta) \\
&= f(y)+D_yf(y)\cdot\eta+\omega_f(\eta) \\
&= f(y)+D_yf(y)(D_xg(x)\xi+\omega_g(\xi))+\omega_f(\eta) \\
&= f(y)+D_yf(y)D_xg(x)\cdot\xi+D_yf(y)\omega_g(\xi)+\omega_f(\eta) \\
&= (f\circ g)(x)+\underbrace{D_yf(y)D_xg(x)}_{D_x(f\circ g)}\cdot\xi+\omega_{f\circ g}(\xi),
\end{aligned}$$

wobei hier $\omega_{f\circ g}(\xi)=D_yf(y)\omega_g(\xi)+\omega_f(\eta)$. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\omega_{f\circ g}(\xi)\|}{\|\xi\|}=0.$$

Aus $\lim\limits_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\omega_g(\xi)\|}{\|\xi\|}=0$ folgt sofort $\lim\limits_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|D_yf(y)\omega_g(\xi)\|}{\|\xi\|}=0$. Wir schließen aber auch, dass es eine Konstante $c>0$ geben muss, sodass $\|\omega_g(\xi)\|\le c\,\|\xi\|$. Wegen $\lim\limits_{\|\eta\|\to 0}\frac{\|\omega_f(\eta)\|}{\|\eta\|}=0$ muss es ein $\tilde\omega_f(\eta)$ mit $\lim\limits_{\eta\to 0}\tilde\omega_f(\eta)=0$ geben, sodass $\omega_f(\eta)=\|\eta\|\cdot\tilde\omega_f(\eta)$. Mit diesen Aussagen gilt:

$$\begin{aligned}
\|\omega_f(\eta)\| &= \|D_xg(x)\xi+\omega_g(\xi)\|\,\|\tilde\omega_f(\eta)\| \\
&\le (\|D_xg(x)\|\,\|\xi\|+\|\omega_g(\xi)\|)\cdot\|\tilde\omega_f(\eta)\| \\
&\le (\|D_xg(x)\|+c)\,\|\xi\|\cdot\|\tilde\omega_f(\eta)\| \\
\Longrightarrow\quad \frac{\|\omega_f(\eta)\|}{\|\xi\|} &\le (\|D_xg(x)\|+c)\cdot\|\tilde\omega_f(\eta)\|
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{\xi\to 0}\eta=\lim\limits_{\xi\to 0}D_xg(x)\xi+\omega_g(\xi)=0$ folgt $\lim\limits_{\xi\to 0}\tilde\omega_f(\eta)=0$ und damit

$$0\le\lim_{\xi\to 0}\frac{\|\omega_f(\eta)\|}{\|\xi\|}\le\lim_{\xi\to 0}(\|D_xg(x)\|+c)\cdot\|\tilde\omega_f(\eta)\|=(\|D_xg(x)\|+c)\cdot\left\|\lim_{\xi\to 0}\tilde\omega_f(\eta)\right\|=0$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\omega_{f\circ g}(\xi)\|}{\|\xi\|}\le\lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|D_yf(y)\omega_g(\xi)\|}{\|\xi\|}+\lim_{\xi\to 0}\frac{\|\omega_f(\eta)\|}{\|\xi\|}=0$$

□

Bemerkung 4.19 (Komponentenweise für $i=1,\dots,m$ und $j=1,\dots,r$).

$$D_xh(x)=D_yf(y)D_xg(x)\Leftrightarrow\underbrace{\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x)}_{\partial_i(f\circ g)_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(g_1(x),\dots,g_n(x))\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)$$

Spezialfall: $m=r=1$ ($g\colon D_g\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,\ f\colon D_f\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$)

$$h'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_k}\,(g_1(x),\dots,g_n(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_k(x)=(\nabla_yf(g(x)),g'(x))_2$$

4.3 Mittelwertsatz

Bemerkung 4.20. Reminder:

(1) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt (HDI):

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x+sh)\,\mathrm{d}s &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 f'(x+sh)\cdot h\,\mathrm{d}s \\ &= \left(\int_0^1 f'(x+sh)\,\mathrm{d}s\right)\cdot h. \end{aligned}$$

(2) Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \tau \in (0,1)$ sodass:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\tau h)\cdot h.$$

(3) Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n} : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann sei:

$$\int_a^b A(s)\,\mathrm{d}s := \left(\int_a^b a_{i,j}(s)\,\mathrm{d}s\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

Satz 4.21 (Mittelwertsatz)**.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ sodass $x + sh \in D$, für $s \in [0,1]$. Dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh)\,\mathrm{d}s\,, h\right)_2 = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh)\,\mathrm{d}s\right)^T \cdot h.$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, mit Jacobi-Matrix $J_f(x)$, dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh)\,\mathrm{d}s\right) h.$$

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$. Sei $g_j : [0,1] \to \mathbb{R},\ g_j(s) := f_j(x+sh)$. Dann gilt:

$$f_j(x+h) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) \overset{\text{HDI}}{=} \int_0^1 g_j'(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+sh)\cdot h_i\,\mathrm{d}s\,.$$

Ist $m = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh)\,\mathrm{d}s\ \cdot h_i = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+sh)\,\mathrm{d}s\right)\cdot h_i \\ &= \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh)\,\mathrm{d}s\,, h\right)_2 \end{aligned}$$

Ist $m \geq 2$, so gilt analog zu oben:

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh)\,\mathrm{d}s\right)\cdot h.$$

□

Bemerkung 4.22. Für $m = 1$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ gilt sogar für ein bestimmtes $\tau \in (0,1)$:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \big(\nabla^T f(x+sh) \cdot h\big)\,\mathrm{d}s = \nabla^T f(x+\tau h) \cdot h.$$

Für $m \geq 2$ im Allgemeinen aber nicht (da $\tau \in [0,1]$ nicht für alle Komponenten gleich gewählt werden kann):

$$f(x+h) - f(x) \neq J_f(x+\tau h) \cdot h.$$

Lemma 4.23. Seien $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ stetig. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b v(s)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s\,, \qquad \left\| \int_a^b A(s)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \leq \int_a^b \|A(s)\|_2 \,\mathrm{d}s$$

Beweis. Sei $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \int_a^b v(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_a^b v_n(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}$ und $K = \|u\|_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} K^2 &\overset{\ell_2\text{Norm}}{=} (u,u)_2 = \left(\int_a^b v(s)\,\mathrm{d}s\,, u \right)_2 = \int_a^b (v(s), u)_2 \,\mathrm{d}s \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b \|v(s)\|_2 \cdot \|u\|_2 \,\mathrm{d}s = K \cdot \int_a^b \|v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; K = \left\| \int_a^b v(s)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(s)\|_2 \,\mathrm{d}s\,.$$

Der Beweis für $A(s)$ folgt ganz analog mit $u = \int_a^b A(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}^{m\times n}$. ☐

Definition 4.24. $D \subset \mathbb{K}^n$ heißt <u>konvex</u>, genau dann wenn: für alle $x, x' \in D$ und für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda \cdot x + (1-\lambda)x' \in D$.
Geometrisch: Für zwei Punkte in D liegt die Verbindungsstrecke der beiden Punkte stets ganz in D.

Korollar 4.25. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ sodass $K_\varepsilon(x) \subset D$. Dann gilt:

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \qquad \forall y \in K_\varepsilon$$

mit $M := \sup_{z \in K_\varepsilon(x)} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist lokal Lipschitz-stetig.
Sei D konvex, dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \cdot \|y - x\|_2 \qquad \forall x, y \in D$$

mit $M := \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2$, das heißt f ist auf D Lipschitz-stetig.

Beweis. Aus Lemma 4.23 folgt:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, \mathrm{d}s \right\|_2 &\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)h\|_2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)\|_2 \, \|h\|_2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{0<s<1} \|J_f(x+sh)\|_2 \cdot \|h\|_2
\end{aligned}$$

$$\implies \|f(x+h)-f(x)\|_2 = \left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h \, \mathrm{d}s \right\|_2 \leq M \cdot \|x+h-x\|_2 \, .$$

Sei D nun konvex. Für $x, y \in D$ gilt dann:

$$z = ty + (1-t)x = x + t(y-x) \in D, \qquad t \in [0,1].$$

Sei $g(t) := f(x+t(y-x))$ für $t \in [0,1]$. Dann gilt für $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$f_i(y) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(s) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x+s(y-x))}{\partial x_j}(y_j - x_j) \, \mathrm{d}s \, .$$

Und damit in Vektorform:

$$\begin{aligned}
\|f(y)-f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 J_f(x+s(y-x)) \cdot (y-x) \, \mathrm{d}s \right\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 4.23}}{\leq} \int_0^1 \|J_f(x+s(y-x)) \cdot (y-x)\|_2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^1 \|J_f(x+s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \, \mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{0<s<1} \|J_f(x+s(y-x))\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&\overset{D \text{ konvex}}{\leq} \sup_{z \in D} \|J_f(z)\|_2 \cdot \|y-x\|_2 \\
&= M \cdot \|y-x\|_2 \, .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.26. Obige Lipschitz-Konstante liefert eine Abschätzung für die Ableitungen/ Jacobi-Matrix von f.

4.4 Taylor-Entwicklung

Bemerkung 4.27. Reminder - Höhere Ableitungen:

(1) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Seien alle partiellen Ableitungen

$$\partial_i f : D \to \mathbb{R}^m, \ \partial_i f = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_m \end{pmatrix}, \quad \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

wieder partiell differenzierbar. Dann ist f zweimal differenzierbar auf D (mit Ableitungen $\partial_j\partial_i f,\ i,j \in \{1,\dots,n\}$).
Allgemein: (induktiv) $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist $(k+1)$-mal partiell differenzierbar, wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung $\partial_{i_k}\partial_{i_{k-1}}\dots\partial_{i_1} f$ $(i_k,\dots,i_1 \in \{1,\dots,n\})$ partiell differenzierbar sind.

(2) $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist k-mal stetig partiell differenzierbar, wenn f k-mal differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der k-ten Ordnung stetig sind ($f \in C^k(D,\mathbb{R}^m)$).

(3) Es gilt:

$$\begin{aligned} f \in C^1(D,\mathbb{R}^m) \quad &\Longleftrightarrow \quad \partial_i f : D \to \mathbb{R}^m \text{ ist stetig } \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \partial_i f_k : D \to \mathbb{R} \text{ ist stetig } \forall i \in \{1,\dots,n\}, k \in \{1,\dots,m\} \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ ist total differenzierbar in } D \text{ und } x \mapsto J_f(x) = (\partial_i f_k)_{i,k} \text{ stetig} \end{aligned}$$

(4) Ist $f \in C^k(D,\mathbb{R}^m)$, dann sind die Ableitungen der $k-1$-ten Ordnung $\partial_{i_{k-1}}\dots\partial_{i_1} f : D \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar, weil stetig partiell differenzierbar. Also ist $\partial_{i_{k-1}}\dots\partial_{i_1} f$ stetig und damit sind alle Ableitungen $k-1$-ter Ordnung stetig. Ananolg folgt induktiv, dass alle Ableitungen j-ter Ordnung mit $j \leq k$ stetig auf D sind.

(5) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$. Existieren $\partial_i f, \partial_j f$ und $\partial_j\partial_i f$ auf D $(i,j \in \{1,\dots,n\})$ und $\partial_j\partial_i f$ stetig in $a \in D$. Dann existiert $\partial_i\partial_j f$ und es gilt

$$\partial_i\partial_j f(a) = \partial_j\partial_i f(a).$$

(6) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^k(D,\mathbb{R}^m)$. Sei $\pi \in \mathcal{S}_k$ eine Permutation, dann gilt:

$$\partial_{i_k}\dots\partial_{i_1} f = \partial_{i_{\pi(k)}}\dots\partial_{i_{\pi(1)}} f, \qquad \forall i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}.$$

Reminder - Taylor-Entwicklung in $\mathbb{R}$:

(1) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(r+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R^f_{r+1}(x,h).$$

(2) Für das Restglied in Lagrange-Form gilt $(\theta \in (0,1))$:

$$R^f_{r+1}(x,h) = \frac{f^{(r+1)}(x+\theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}.$$

(3) Für das Restglied in Integral-Form:

$$R^f_{r+1}(x,h) = \frac{h^{r+1}}{r!} \int_0^1 f^{(r+1)}(x+th)(1-t)^r \,\mathrm{d}t$$

Satz 4.28 (Taylor-Formel)**.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\{x+th \mid t \in [0,1]\} \subset D$

und $f \in C^{r+1}(D,\mathbb{R})$. Dann existiert ein $\theta \in [0,1]$ sodass gilt:

$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1} f(x) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k}}_{\text{Taylor-Polynom}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{(r+1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{n} \partial_{i_{r+1}} \ldots \partial_{i_1} f(x+\theta h) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_{r+1}}}_{\text{Restglied}}$$

Beweis. Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, g(t) \coloneqq f(x+th)$. Es gilt $g \in C^{r+1}([0,1],\mathbb{R})$ und

$$\frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(x+th) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k}. \tag{4.2}$$

Wir zeigen (4.2) durch Induktion nach k.
(IA) $k=1$ Es ist $g \in C^1$ und nach Kettenregel gilt:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+th) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+th)}{\partial x_i} \cdot h_i.$$

(IV) Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt (4.2).
(IS) $k \mapsto k+1$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^k g(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k}.$$

Aus $f \in C^{k+1}(D,\mathbb{R})$ folgt, dass $\frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k} \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, womit nach Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{k+1} g(t)}{\mathrm{d}t^{k+1}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} \right) \cdot h_j \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f(x+th)}{\partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ferner liefert die Taylor-Formel in $\mathbb{R}$ für g die Existenz eines $\theta \in [0,1]$ sodass gilt:

$$g(1) - g(0) = f(x+h) - f(x) = \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \right) + \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}.$$

Einsetzen von (4.2) liefert die Behauptung. □

Bemerkung 4.29. Um die Notation vieler, verschieden indizierter partieller Ableitungen zu erleichtern, führen wir die Multiindex-Notation ein:

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ seien:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\
\partial^\alpha f &:= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, && \text{für } f \in C^{|\alpha|}(D, \mathbb{R}), \\
\alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n! \in \mathbb{N}_0, \\
h^\alpha &:= h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}, && \text{für } h = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.30. Seien $n = 3$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Multiindizes der Ordnung $|\alpha| = 2$ sind:

α	$(2,0,0)$	$(0,2,0)$	$(0,0,2)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(0,1,1)$
$\alpha!$	$2! \cdot 0! \cdot 0! = 2$	2	2	1	1	1
$\partial^\alpha f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$,	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$

Summennotation für partielle Ableitungen 2-ter Ordnung:

$$\sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Bemerkung 4.31. Mit dieser Notation lässt sich die Taylor-Formel kompakt schreiben als:

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Beweis. Die Reihenfolge der Differenzierung kann vertauscht werden. Daraus folgt für alle k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1} f(y) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(y) \cdot h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} = \partial^\alpha f(y) \cdot h^\alpha$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_s := \#\{i_j \mid i_j = s \text{ für } j \in \{1, \ldots, k\}\}$ (Anzahl wie oft Index s in $(i_1, \ldots, i_k)$ vorkommt).
Ohne Beweis (siehe S.72 Skript Ana2 Rolf Rannacher): für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ gilt: die Anzahl von k-Tupeln $(i_1, \ldots, i_k)$ bei denen der Index s genau α_s-mal vorkommt ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k}(t) &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f(x+th)}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x+th) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) h^\alpha,
\end{aligned}$$

womit insbesondere auch gilt

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k}(t) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Und können ferner festhalten:

$$\begin{aligned}
f(x+h) = g(1) &\overset{\text{Taylor in } \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}t^k}(0) + \frac{1}{(r+1)!} \frac{\mathrm{d}^{r+1} g(\theta)}{\mathrm{d}t^{r+1}} \\
&= \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)! \cdot \partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{Restglied in Lagrange-Form}}
\end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}
f(x+h) = g(1) &\overset{\text{Taylor in } \mathbb{R}}{=} \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{r!} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^{r+1} g(t)}{\mathrm{d}t^{k+1}} (1-t)^r \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \frac{1}{r!} \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)! \cdot \partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{(r+1) \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r \,\mathrm{d}t}_{\text{Restglied in Integral-Form}}
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.32. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{r+1}(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$, für die $x + th \in D$ (für alle $t \in [0,1]$)

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_{r+1}(x,h),$$

sodass

$$\frac{\omega_{r+1}(x,h)}{\|h\|^{r+1}} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

also $\omega_{r+1}(x,h) = o(\|h\|^{r+1})$.

Beweis. Da D offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(x) \subset D$. Nach Taylor-Formel existiert für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$ ein $\theta \in [0,1]$ sodass

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \le r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\
&= \sum_{|\alpha| \le r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha}_{=: \omega_{r+1}(x,h)}
\end{aligned}$$

Nun gilt noch zu zeigen, dass: $\frac{\omega_{r+1}(x,h)}{\|h\|^{r+1}} \xrightarrow{h \to 0} 0$.
Es gilt:

$$|h^\alpha| = |h_1^{\alpha_1}| \cdots |h_n^{\alpha_n}| \le \|h\|^{\alpha_1} \cdots \|h\|^{\alpha_n} = \|h\|^{|\alpha|}.$$

Womit wir abschätzen können:

$$\begin{aligned}
\frac{|\omega_{r+1}(x,h)|}{\|h\|^{r+1}} &= \frac{1}{\|h\|^{r+1}} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(x+\theta h) - \partial^\alpha f(x)| \cdot |h_1^{\alpha_1}| \cdots |h_n^{\alpha_n}| \\
&= \frac{|h^{r+1}|}{\|h\|^{r+1}} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(x+\theta h) - \partial^\alpha f(x)| \\
&\overset{|h^{r+1}|\leq\|h\|^{r+1}}{\leq} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{|\partial^\alpha f(x+\theta h) - \partial^\alpha f(x)|}_{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ weil alle } \partial^\alpha f \text{ stetig sind}} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.33. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass $x + th \in D$ (für alle $t \in [0,1]$):

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x,h), \qquad \text{mit } \frac{\omega_2(x,h)}{\|h\|^2} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Dabei ist $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von f. Das heißt das Taylor-Polynom 2. Ordnung ist eine quadratische Approximation von f. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ gilt:

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x,h), \qquad \text{mit } \frac{\omega_1(x,h)}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Das heißt das Taylor-Polynom 1. Ordnung ist eine lineare Approximation von f.

Beweis. Folgt aus 4.32 mir $r+1=2$ bzw. $r+1=1$ sowie:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=0} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= f(x), \\
\sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \frac{1}{1!} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot h_i = (\nabla f(x), h)_2, \\
\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j = \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2.
\end{aligned}$$

□

Definition 4.34. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ beliebig oft partiell differenzierbar, $x \in D$. Dann heißt die Taylor-Reihe von f in x:

$$T_\infty^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Korollar 4.35. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$T_r^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} f(x+h),$$

wenn

$$R^f_{r+1}(x,h) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad x \in D. \tag{4.3}$$

Eine hinreichende Bedingung für (4.3) ist

$$\sup_{|\alpha|\geq 0} \sup_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)| \leq M_f < \infty,$$

das heißt alle partiellen Ableitungen von f sind gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Siehe Skript Ana2 Rolf Rannacher, Seite 74, Übungsaufgabe 3.23. □

Bemerkung 4.36. Die Taylor Reihe von f konvergiert gegen f, wenn die Funktion f durch eine Potenzreihe beschrieben wird (also wenn f analytisch ist).

4.5 Extremwertaufgaben

Definition 4.37 (lokales Maximum/Minimum)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in D$ heißt lokales Minimum (Maximum) von f, falls eine Umgebung $K_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) \leq f(y),\ \forall y \in K_\delta(x) \cap D$$

$(f(x) \geq f(y),\ \forall y \in K_\delta(x) \cap D)$. Falls

$$f(x) < f(y), \forall y \in K_\delta(x) \cap D \setminus \{x\}$$

$(f(x) > f(y))$, dann heißt x striktes lokales Minimum (Maximum).

Satz 4.38 (Notwendige Bedingung für lokales Extremum (Min oder Max))**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in D$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt : $\nabla f(x) = 0$.

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$, betrachte $g_i(t) := f(x + te_i)$. Da D offen ist, sind alle g_i auf einem Intervall $(-\delta, \delta), \delta > 0$ wohldefiniert und differenzierbar. $g_i(t)$ hat in $t = 0$ ein lokales Minimum/-Maximum , also gilt $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Aufgrund der totalen Differenzierbarkeit von f folgt

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}g_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \delta_{ij} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \qquad \forall i = 1 \ldots, n$$

□

Bemerkung 4.39. Die Umkehrung ist falsch, z.B. $f(x) = x^3,\ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hat in $x = 0$ $\nabla f(x) = 0$, aber $x = 0$ ist kein Max/Min von $f(x) = x^3$.
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ hat in $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla f(x) = 0$, aber $x = 0$ ist kein Max/Min von f.

Satz 4.40 (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$ mit $\nabla f(x) = 0$. Dann gilt:

1. $H_f(x)$ positiv definit $\implies$ x striktes lokales Minimum von f.
2. $H_f(x)$ negativ definit $\implies$ x striktes lokales Maximum von f.
3. $H_f(x)$ indefinit $\implies$ x kein lokales Extremum.

Beweis. Nach Taylor gilt lokal um x:

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x,h)$$

mit $\frac{\omega_2(x,h)}{\|h\|^2} \overset{h\to 0}{\to} 0$

1. Sei $H_f(x)$ positiv definit. Betrachte $\min_{\|h\|=1}(H_f(x)h,h)_2$. Die Menge $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ ist kompakt $\implies$ $(H_f(x)h,h)_2$ nimmt ihr Minimum auf $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$ als stetige Funktion an. $\implies$ $\alpha := \min_{\|h\|=1}(H_f(x)h,h)_2 > 0$, da $H_f(x)$ positiv definit ist. Sei $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt

$$(H_f(x)h,h)_2 = \|h\|^2 \underbrace{\left(H_f(x)\cdot \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right)_2}_{\geq \alpha} \geq \alpha \|h\|^2 > 0$$

Wähle $\delta > 0$ klein, sodass $\forall \|h\| < \delta$ gilt $|\omega_2(x,h)| \leq \frac{\alpha}{4}\|h\|^2$ (weil $\omega_2(x,h) = o(\|h\|^2)$). Damit gilt $\forall h, \|h\| < \delta$

$$f(x+h) = f(x) + (\underbrace{\nabla f(x)}_{=0}, h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h,h)_2 + \omega_2(x,h) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 > f(x)$$

$\implies$ x striktes lokales Minimum von f.

2. Ersetze f durch $-f$, dann 1)
3. $\exists h \in \mathbb{R}^n$ mit $(H_f(x)h,h)_2 = \alpha > 0$, sodass

$$f(x+th) \overset{\text{Taylor}}{=} f(x) + \frac{1}{2}t^2 \cdot \alpha + \omega_2(x,th) = f(x) + t^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \underbrace{\frac{\omega_2(x,th)}{t^2}}_{\overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0}\right) \overset{\text{für } 0<t\ll 1}{>} f(x)$$

Außerdem $\exists \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $(H_f(x)\eta,\eta)_2 = \beta < 0$. Analog $\implies$ $f(x+t\eta) \leq f(x) + \beta\frac{t^2}{4} < f(x)$ für $0 < t \ll 1$. $\implies$ $f(x)$ kein Maximum/Minimum.

$\square$

Beispiel 4.41. 1. $f(x,y) := x^2 + 2y^2 \implies \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = 0$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ positiv definit. $\implies$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ striktes lokales Minimum (sogar global).

$f(x) \leq f(y)$	$\forall y \in D$	globales Minimum
$f(x) < f(y)$	$\forall y \in D \setminus \{x\}$	striktes globales Minimum

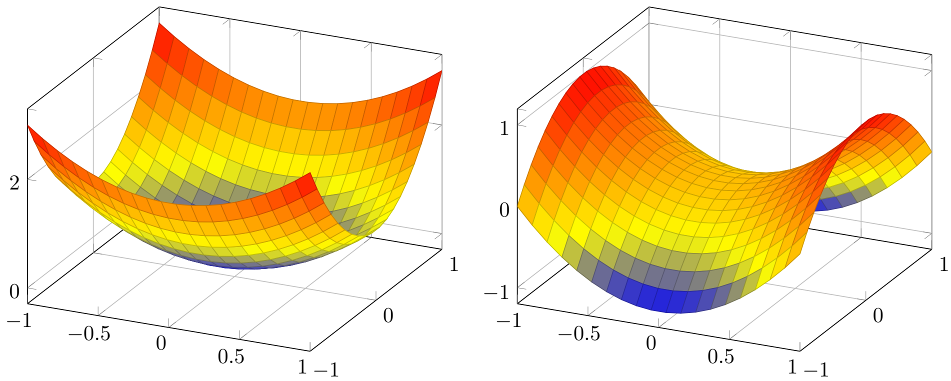


Abbildung 4.1: Links: $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ ist ein Paraboloid, Rechts: $f(x,y) = x^2 - y^2$ ist eine Sattelfläche

2. $f(x,y) \coloneqq x^2 - y^2 \implies \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit. $\implies 0 \in \mathbb{R}^2$ kein lokales Extremum.

3. $f_1(x,y) \coloneqq x^2 + y^4,\ f_2(x,y) \coloneqq x^2,\ f_3(x,y) \coloneqq x^2 + y^3$ Es gilt

$$\nabla f_i(0) = 0 \in \mathbb{R}^2,\ H_{f_i}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \forall i = 1,2,3$$

Die Hesse-Matrix ist positiv semidefinit. Es gilt

für f_1:	Punkt 0 ist ein	striktes lokales Maximum,
für f_2:	Punkt 0 ist ein	lokales Minimum, aber nicht strikt,
für f_3:	Punkt 0 ist ein	Sattelpunkt.

4.6 Implizite Funktionen und Umkehrabbildung.

Frage: Umkehrabbildung: Auflösen von $x = g(y)$, d.h.

$$\left.\begin{cases} x_1 & = g_1(y_1,\dots,y_n) \\ \vdots & \\ x_n & = g_n(y_1,\dots,y_n) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 0 & = x_1 - g_1(y_1,\dots,y_n) \\ \vdots & \\ 0 & = x_n - g_n(y_1,\dots,y_n) \end{array}\right\} \tag{*}$$

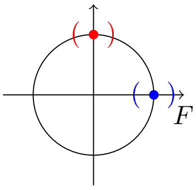
n Gleichungen, n Unbekannte $y_1,\dots,y_n$. Gesucht: Abbildung f mit $y = f(x)$ $(f = g^{-1})$, s.d. $(x, f(x))$ Gleichung (*) löst (lokal um $(x_0, y_0 = f(x_0))$).

Implizite Funktion m Gleichungen, m Unbekannte $y_1,\dots,y_m$.

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & = F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \\ \vdots & \\ 0 & = F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \end{array}\right\} \tag{**}$$

$0 = F(x,y)$ Auflösen nach y, d.h. Gesucht: Abbildung f, s.d. $y = f(x)$ mit $(x, f(x))$ löst (**) (lokal um eine Lösung $(x_0, y_0) : F(x_0, y_0) = 0$)

Beispiel 4.42. $m = 1,\ n = 1,\ F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$



An der Stelle $x_0 = 0,\ y_0 = 1$ gilt $F(0, 1) = 0$,
also $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$.

$$\implies f(x) := \sqrt{1 - x^2} \text{ für } |x| < 1$$

erfüllt $F(x, f(x)) = 0,\ |x| < 1$.

Für $x_0 = 1,\ y_0 = 0$ hingegen gibt es keine Umgebung von $x_0 = 1$, sodass

$$\exists f\colon U(x_0) \to \mathbb{R} \text{ mit } F(x, f(x)) = 0.$$

Satz 4.43 (Satz über implizite Funktionen)**.** Sei $D^x \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D^y \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F \in C^1(D^x \times D^y, \mathbb{R}^m)$ (stetig differenzierbar) und $(\hat{x}, \hat{y}) \in D^x \times D^y$ mit $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Die $m \times m$ Matrix

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

sei im Punkt $(\hat{x}, \hat{y})$ invertierbar. Dann gilt:

1. $\exists$ offene Umgebungen $U(\hat{x}) \subset D^x$, $U(\hat{y}) \subset D^y$ um $\hat{x}$ und $\hat{y}$ und $\exists$ eine stetige Funktion $f\colon U(\hat{x}) \to U(\hat{y})$, s.d.
$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U(\hat{x})$$
2. f ist eindeutig bestimmt, d.h. $F(x, y) = 0$ für $(x, y) \in U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \Leftrightarrow y = f(x)$
3. f ist in $\hat{x}$ stetig differenzierbar und $J_f(\hat{x}) = D_x f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist
$$D_x f(\hat{x}) = -(D_y F(\hat{x}, \hat{y}))^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y}).$$

Beweis. 1. O.B.d.A. sei $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ (sonst betrachte $F(x, y) - F(\hat{x}, \hat{y})$). Die Matrix $J_y := D_y F(0, 0)$ ist regulär. Definiere $G\colon D^x \times D^y \to \mathbb{R}^m$, $G(x, y) := y - J_y^{-1} F(x, y)$. G ist stetig differenzierbar und erfüllt: $G(0, 0) = 0$ und $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = y$. Jacobi-Matrix von $G(x, y)$ bzgl. y:

$$D_y G(x, y) = \mathbb{I} - J_y^{-1} D_y F(x, y) \text{ und insb. } D_y G(0, 0) = \mathbb{I} - J_y^{-1} J_y = 0.$$

F stetig differenzierbar $\implies$ $D_y G(x, y)$ stetig $\implies$ $\exists K_r^x(0) \times K_r^y(0) \subset D^x \times D^y$ mit Radius r, sodass $\|D_y G(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{2}$, $(x, y) \in K_r^x(0) \times K_r^y(0)$. $G(0, 0) = 0$ $\implies$ $\exists K_s^x(0) \subset K_r^x(0)$ mit Radius $0 < s \leq r$ sodass

$$\|G(x, 0)\|_2 \leq \frac{1}{2} r,\ x \in K_s^x(0)$$

Ziel: Konstruiere $f\colon K_s^x(0) \to K_r^y(0)$ stetig mit $G(x, f(x)) = f(x)$ $(\Leftrightarrow F(x, f(x)) = 0)$. Betrachte Fixpunktgleichung

$$G(x, y) = y,\ x \in K_s^x(0).$$

Für $(x, y_1),\ (x, y_2) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)$ gilt

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\|_2 \overset{\text{MWS}}{\leq} \sup_{(x,y) \in K_s^x(0) \times K_r^y(0)} \|D_y G(x, y)\|_2 \cdot \|y_1 - y_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_2 .$$

Sei $y \in \overline{K_r^y(0)}$

$$\|G(x,y)\|_2 \leq \|G(x,y) - G(x,0)\|_2 + \|G(x,0)\|_2 \leq \frac{1}{2}\|y\|_2 + \frac{1}{2}r \leq r$$

d.h. $G(x,\cdot)$ ist eine Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugel $\overline{K_r^y(0)}$.

Außerdem, $\|G(x,y_1) - G(x,y_2)\|_2 \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\| \implies G(x,\cdot)$ ist eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L = \frac{1}{2}$. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz (3.20) folgt $\forall x \in K_s^x(0) \exists!$ ein Fixpunkt $y(x) \in K_r^y(0)$ von $G(x,\cdot)$:

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(x),\ y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)),\ k \in \mathbb{N}$$

mit Startpunkt $y^{(0)}(x) := 0$. Es gilt die Fehlerabschätzung $\forall x \in K_s^x(0)$:

$$\left\|y(x) - y^{(k)}(x)\right\|_2 \leq 2^{-k}\left\|y^1(x) - y^{(0)}(x)\right\|_2 = 2^{-k}\|G(x,0) - 0\|_2 \leq 2^{-k}\frac{1}{2}r$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$y^{(k)}(x) = G(x, y^{(k-1)}(x)) = y^{(k-1)}(x) - J_y^{-1}\underbrace{F(x, y^{(k-1)}(x))}_{\text{stetig}}$$

Induktiv folgt $y^{(k)}(x)$ stetig in $x \in K_2^x(0)$. Definiere $f(x) = y(x),\ f\colon K_s^x(0) \to K_r^y(0)$ und nach Konstruktion gilt

$$G(x, f(x)) = f(x), \quad x \in K_s^x(0).$$

Aus der Abschätzung $\left\|y(x) - y^{(k)}(x)\right\| \leq 2^{-k-1}\cdot r,\ x \in K_s^x(0)$ folgt, dass $y^{(k)}(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y(x)$ gleichmäßig auf $K_s^x(0)$ konvergiert $\implies y(x)$ stetig. $\implies$ 1. Behauptung für $(\hat{x},\hat{y}) = (0,0)$ mit $U(\hat{x}) := K_s^x(0)$ und $U(\hat{y}) := K_r^y(0)$.

2. Die Eindeutigkeit von $y = f(x)$ folgt nun aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Für $x \in K_s(\hat{x})$ ist der Fixpunkt der Gleichung $G(x,y) = y$ eindeutig bestimmt.

3. Da $F(x,y)$ in $(0,0)$ differenzierbar ist, gilt nach Definition der Differenzierbarkeit

$$F(x,y) = \underbrace{F(0,0)}_{=0} + D_xF(0,0)\cdot x + \underbrace{D_yF(0,0)}_{=J_y}\cdot y + \omega(x,y),$$

wobei $\omega\colon K_s^x(0) \times K_r^y(0) \to \mathbb{R}^m$ die Eigenschaft $\|\omega(x,y)\|_2 = o(\|(x,y)\|_2)$ besitzt. Aus dem Beweis von 1. wissen wir, dass $F(x,f(x)) = 0$ für $x \in K_s^x(0)$ gilt. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= F(x,f(x)) = D_xF(0,0)\cdot x + J_y\cdot f(x) + \omega(x,f(x)) \\ f(x) &= -J_y^{-1}\cdot D_xF(0,0)\cdot x \underbrace{- J_y^{-1}\cdot\omega(x,f(x))}_{=:\psi(x)} \\ &= -J_y^{-1}D_xF(0,0)x + \psi(x) \end{aligned}$$

Reminder: Def. Differenzierbarkeit: $f(0+x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + Df(x)\cdot x + \psi(x)$ mit $\psi(x) = o(\|x\|_2)$

Es genügt also zu zeigen, dass $\psi(x) = o(\|x\|_2)$, d.h. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{\|x\|_2} = 0$. Wir nutzen $\omega(x,y) = o(\|(x,y)\|_2)$, d.h.

$$\frac{\|\omega(x,y)\|_2}{\|(x,y)\|_2} \xrightarrow{\|(x,y)_2\|\to 0} 0$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 \in (0,s),\ \delta_2 \in (0,r)$ sodass $\forall x$ mit $\|x\|_2 \leq \delta_1$ und $\forall y$ mit $\|y\|_2 \leq \delta_2$ gilt

$$\|\omega(x,y)\|_2 \leq \varepsilon\|(x,y)\|_2 \leq \varepsilon(\|x\|_2 + \|y\|_2)$$

Da f überdies auch stetig ist (siehe Beweis 1.), gibt es ein $\delta \in (0, \delta_1)$ sodass $\forall \|x\|_2 \leq \delta$ gilt $\|f(x)\|_2 \leq \delta_2$. Daraus schließen wir für x mit $\|x\|_2 \leq \delta$:

$$\|\omega(x, f(x))\|_2 \leq \varepsilon(\|x\|_2 + \|f(x)\|_2)$$

Dies können wir nun auf $f(x)$ anwenden.

$$f(x) = -J_y^{-1} D_x F(0,0) \cdot x + \psi(x)$$

Es gilt $\psi(x) = -J_y^{-1}\omega(x, f(x))$

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \underbrace{\left\|J_y^{-1} D_x F(0,0)\right\|_2}_{=:c_1} \cdot \|x\|_2 + \underbrace{\left\|J_y^{-1}\right\|_2}_{=:c_2} \cdot \|\omega(x, f(x))\|_2 \\ &\leq c_1 \|x\|_2 + c_2 \|\omega(x, f(x))\|_2\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\varepsilon = \frac{1}{2c_2}$, so erhalten wir für genügend kleines x

$$\begin{aligned} &\leq c_1 \|x\|_2 + c_2 \cdot \frac{1}{2c_2}(\|x\|_2 + \|f(x)\|_2) \\ &= \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\|x\|_2 + \frac{1}{2}\|f(x)\|_2 \\ \implies \frac{1}{2}\|f(x)\|_2 &\leq \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\|x\|_2\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also:

$$\|\psi(x)\|_2 \quad \leq \quad \left\|J_y^{-1}\right\|_2 \cdot \|\omega(x, f(x))\|_2$$

Für $\|x\|_2 \leq \delta$ gilt

$$\begin{aligned} &\leq \quad c_2 \cdot \varepsilon(\|x\|_2 + (2c_1 + 1)\|x\|_2) \\ &\leq \quad \varepsilon \cdot c_3 \cdot \|x\|_2\end{aligned}$$

Daraus schließen wir

$$\frac{\|\psi(x)\|_2}{\|x\|_2} \quad \leq \quad \varepsilon \cdot c_3$$

Da ε beliebig ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\|\psi(x)\|_2}{\|x\|_2} &\overset{x \to 0}{\to} 0 \\ \implies \frac{\psi(x)}{\|x\|_2} &\overset{x \to 0}{\to} 0\end{aligned}$$

Daraus folgt nun schließlich für das Differential von f in $x = 0$

$$D_x f(0) = -J_y^{-1} D_x F(0,0)$$

Weiter müssen wir noch zeigen, dass $D_x f(x)$ in $K_\delta^x(0) \subset K_s^x(0)$ existiert und stetig ist in $x = 0$. Da $D_y F(x,y)$ stetig in $(0,0)$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\forall (x,y) \in K_s^x(0) \times K_\delta^y(0) \subset K_s^x(0) \times K_r^y(0)$ gilt

$$\|D_y F(0,0) - D_y F(x,y)\|_2 < \frac{1}{\|D_y F(0,0)^{-1}\|_2}$$

Nach dem Störungssatz (2.57) ist also $D_yF(x,y)$ regulär, also $\det D_yF(x,y) \neq 0$. Die Elemente von $D_yF(x,y)^{-1}$ sind nach der Cramerschen Regel stetige Funktionen der Elemente von $D_yF(x,y)$. Daher ist

$$(D_yF(x,y))^{-1}D_xF(x,y)$$

als Produkt stetiger Funktionen stetig und nach Definition der Stetigkeit gilt

$$\left\|(D_yF(x,y))^{-1}D_xF(x,y) - (D_yF(0,0))^{-1}D_xF(0,0)\right\| \xrightarrow{\|(x,y)\|_2 \to 0} 0$$

Analog wie oben folgern wir

$$f(x+h) - f(x) = -(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x)) \cdot h + \omega(x,h), \quad \omega(x,h) = o(\|h\|_2)$$

Die Ableitung $D_xf(x) = -(D_yF(x,f(x)))^{-1}D_xF(x,f(x))$ von f ist stetig in $x=0$.

□

Beispiel 4.44. $F(x,y) := x^2+y^2-1$. Dann ist $D_yF(x,y) = 2y$. Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(\hat{x},\hat{y})$ mit $\hat{x}^2+\hat{y}^2-1=0,\ \hat{y}\neq 0$ (d.h. $\hat{x} \neq \pm 1$) eindeutig durch $y = \sqrt{1-x^2}$ oder $y = -\sqrt{1-x^2}$ nach y auflösbar ist.

Bemerkung 4.45 (Implizites Differenzieren)**.** SIF und $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),\ F(x,f(x)) = 0$. Kettenregel: $0 = F(x,f(x))$.

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x,f(x)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) \implies \frac{\partial f}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Die zweiten Ableitungen erhält man durch implizites Differenzieren von $\frac{\mathrm{d}F(x,f(x))}{\mathrm{d}x} = 0$.

Beispiel 4.46. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x,f(x)) = 0$

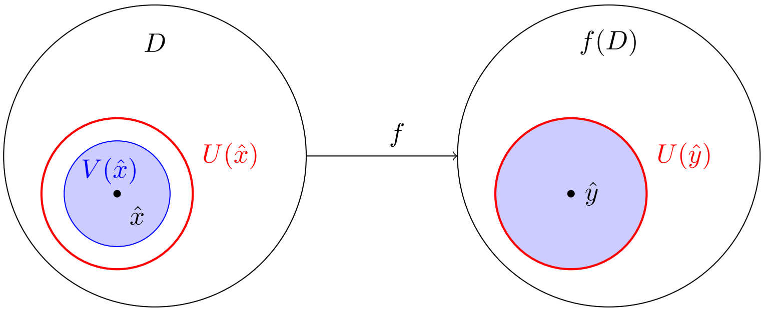
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}f' && \text{1. Ableitung}\\
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}f'\right) && \text{2. Ableitung}\\
0 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}f' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'\right)f' + \frac{\partial F}{\partial y}f''\\
0 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'^2 + \frac{\partial F}{\partial y}f''\\
f'' &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'^2\right)
\end{aligned}$$

4.6.1 Umkehrabbildungen

Fragestellung: Sei $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : B_f \to \mathbb{R}^n$?

Definition 4.47. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär in $\hat{x} \in D$, wenn $\exists K_\delta(\hat{x}) \subset D$, sodass f in $K_\delta(\hat{x})$ stetig differenzierbar und die Jacobimatrix $J_f(\hat{x})$ regulär ist. f heißt regulär in D, wenn f in jedem Punkt $\hat{x} \in D$ regulär ist.

Satz 4.48 (Umkehrabbildung)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ regulär in $\hat{x} \in D$. Dann $\exists$ eine offene Umgebung $V(\hat{x}) \subset D$ von $\hat{x}$ derart, dass $U(\hat{y}) := f(V(\hat{x}))$ eine offene Umgebung von $\hat{y} = f(\hat{x})$ ist und $f\colon V(\hat{x}) \to U(\hat{y})$ bijektiv. Weiter gilt: Die Umkehrabbildung



$f^{-1} : U(\hat{y}) \to V(\hat{x})$ ist regulär in $\hat{y}$ und

$$J_{f^{-1}}(\hat{y}) = (J_f(\hat{x}))^{-1}, \ \det J_{f^{-1}}(\hat{y}) = \frac{1}{\det J_f(\hat{x})}$$

Beweis. Sei $\hat{x} \in D$ und $\hat{y} := f(\hat{x}) \in f(D)$. Betrachte $F\colon \mathbb{R}^n \times D \to \mathbb{R}^n, F(y,x) = y - f(x)$. Für $(\hat{x}, \hat{y})$ gilt $F(\hat{y}, \hat{x}) = 0$. Die Jacobimatrix $D_x F(y,x) = -J_f(x)$ ist regulär in $\hat{x}$. Mit Vertauschung von x und y folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass Umgebungen $U(\hat{y})$, $U(\hat{x})$ und genau eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U(\hat{y}) \to U(\hat{x})$ existieren, sodass $\forall y \in U(\hat{y})$

$$0 = F(y, g(y)) = y - f(g(y)), \implies \exists! x = g(y) \in U(\hat{x}) \text{ mit } y = f(x)$$

Setze dann

$$V(\hat{x}) := U(\hat{x}) \cap f^{-1}(U(\hat{y})) = \{x \in U(\hat{x}) \mid f(x) \in U(\hat{y})\}.$$

Da $U(\hat{x})$ und $f^{-1}(U(\hat{y}))$ offen sind, ist auch $V(\hat{x})$ offen. Daher ist $f\colon V(\hat{x}) \to U(\hat{y})$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon U(\hat{y}) \to V(\hat{x})$ ist gerade g.

$$J_{f \circ f^{-1}}(\cdot) = J_{\text{id}}(\cdot) = \mathbb{I}$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} & J_f(\hat{x}) \cdot J_{f^{-1}}(f(\hat{x})) = \mathbb{I} \\ \implies \ & J_{f^{-1}}(f(\hat{x})) = J_f(\hat{x})^{-1} \end{aligned}$$

□

Korollar 4.49. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ regulär und $O \subset D$ offen. Dann ist $f(O)$ offen.

Beweis. Sei $O \subset D$ offen und $y \in f(O)$ beliebig mit $y = f(x)$, $x \in O$. Nach Satz 4.48 existieren $\forall y$ Umgebungen $K_r(y) \subset f(O)$ und $K_s(x) \subset O$ sodass $K_r(y) \subset f(K_s(x)) \implies f(O)$ offen. □

Bemerkung 4.50. 1. Satz 4.48 garantiert nur die lokale Umkehrbarkeit von f.

2. Es seien U, V offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to V$ stetig differenzierbar.
f heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist.

4.7 Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen

Problemstellung: „Restringierte“ Optimierungsaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen.

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^k$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir suchen einen Punkt $\hat{x} \in D$, s.d. $\hat{x} \in S := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ und $\exists U(\hat{x})$ s.d. $f(\hat{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in U(\hat{x}) \cap S$.
Dann heißt $\hat{x}$ lokales Minimum unter Nebenbedingung $g(x) = 0$. Analog: lokales Maximum unter Nebenbedingung $\hat{x} \in S$, s.d. $\exists U(\hat{x})$ mit $f(\hat{x}) \geq f(x)$ $\forall x \in U(\hat{x}) \cap S$.

Satz 4.51 (Multiplikatorregel von Lagrange: Notwendige Bed. 1. Ordnung für lokales Minimum unter Nebenbedingungen)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^k$ partiell stetig differenzierbar. Sei $\hat{x} \in D$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ und die Gradienten $\nabla g_1(\hat{x}), \dots, \nabla g_k(\hat{x})$ seien linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\exists \hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i \nabla g_i(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x}) (\iff \nabla g(\hat{x}) \hat{\lambda} = \nabla f(\hat{x})).$$

Die Zahlen $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k$ heißen <u>Lagrange-Multiplikatoren</u>.

Beweis. Nach Voraussetzungen gilt

$$\frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_i(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{i=1\dots k, \text{linear unabhängige Vektoren}} .$$

Also hat $\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ Rang k. O.B.d.A. die ersten k Spalten von $\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})$ bilden eine quadratische invertierbare Matrix. Dann lassen sich x und $\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})$ aufspalten:

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x})}_{\in \mathbb{R}^{k \times n}} = \Big(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x});}_{\in \mathbb{R}^{k \times k}} \ \underbrace{\frac{\partial g}{\partial z}(\hat{x})}_{\in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}} \Big).$$

mit $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ regulär.

Setze $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$. Wende nun Satz 4.43 auf $g(x) = g(y, z) = 0$ an. Dann existieren Umgebungen $U(\hat{z}) \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$, $U(\hat{y}) \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine eindeutige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon U(\hat{z}) &\to U(\hat{y}) \\ z &\mapsto \varphi(z) = y, \end{aligned}$$

s.d. φ folgende Eigenschaften erfüllt

(1) $g(\varphi(z), z) = 0 \ \forall z \in U(\hat{z})$

(2) $\hat{y} = \varphi(\hat{z})$

(3) $\varphi \in C^1 \left(U(\hat{z}), \mathbb{R}^k\right)$ stetig differenzierbar.

(4) $\underbrace{\varphi'(\hat{x})}_{D_x \varphi(\hat{x})} = - \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x})\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\hat{x})\right)$

Betrachte $\tilde{f}(z) = f(\varphi(z), z)$, $\tilde{f}(z)\colon U(\hat{z}) \to \mathbb{R}$. Da $\hat{x}$ Extremum von $f(x)$ unter $g(x) = 0$, ist $\hat{z}$ lokales Extremum von $\tilde{f}(z)$ in $U(\hat{z})$. Mit 4.38 folgt also $\forall i = 1 \dots n-l$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \tilde{f}(\hat{z})}{\partial z_i} \\ &\underset{\tilde{f}=f(\varphi(z),z)}{\overset{\text{Kettenregel}}{=}} \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi(\hat{z})}{z_i} + \frac{\partial f(\hat{x})}{z_i} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$0 = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi(\hat{z})}{\partial z} + \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial z} \qquad (*)$$

Definiere

$$\hat{\lambda}^T = \underbrace{\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial y}}_{\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_k}\right)} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x})\right)^{-1}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial y} = \hat{\lambda}^T \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x})\right).$$

Mit $(*)$ folgt

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial y}\left(-\left(\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial z}\right) + \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial z} = -\hat{\lambda}^T \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial z} + \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial z} = 0.$$

Insgesamt folgt

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial y} &= \hat{\lambda}^T \tfrac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}) \\ \tfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial z} &= \hat{\lambda}^T \tfrac{\partial g}{\partial z}(\hat{x}) \end{aligned}\right\} \implies \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} = \hat{\lambda}^T \frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x}.$$

□

Bemerkung 4.52 (Interpretation von Satz 4.51)**.** Definiere Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) - \lambda^T g(x), \quad (x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}^k.$$

Falls $\hat{x}$ lokales Minimum von f unter Nebenbedingung $g(x) = 0$ und $\mathrm{Rg}\left(\frac{\partial g(\hat{x})}{\partial x}\right) = k$. Dann ex. genau ein $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ s.d. $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ ein stationärer Punkt der Lagrange Funktion ist:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) &= \nabla f(\hat{x}) - \nabla g(\hat{x})\hat{\lambda} = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) &= g(\hat{x}) = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 4.53 (Anwendung von 4.51)**.** Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann betrachte

$$f(x) := (x, Ax)_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Bestimme Extrema von $f(x)$ unter Nebenbedingungen $\|x\| = 1$.

Definiere $g(x) = \|x\|_2^2 - 1$ und $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$. Dann gilt für $x \in S$: $\nabla g(x) = 2x \neq 0$, da $\|x\|_2^2 = 1$. Für $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ gilt für $k = 1 \ldots n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \delta_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i \\
&\overset{a_{ij}=a_{ji}}{=} 2 \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\nabla f(x) = 2Ax.$$

Existiert ein $\hat{x}$? Da S kompakt und f stetig, nimmt f (auf S) ein Maximum und Minimum an. Nach Satz 4.51 ex. ein $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\begin{aligned}
& \nabla f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x}) \\
\Longrightarrow \quad & 2A\hat{x} = \hat{\lambda} 2\hat{x} \\
\Longrightarrow \quad & A\hat{x} = \hat{\lambda}\hat{x}.
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\lambda}$ Eigenwert von A zum Eigenvektor $\hat{x}$. Damit folgt

$$f(\hat{x}) = (\hat{x}, A\hat{x})_2 = (\hat{x}, \hat{\lambda}\hat{x})_2 = \hat{\lambda} \underbrace{\|\hat{x}\|_2^2}_{=1} = \hat{\lambda}.$$

Das bedeutet, dass

$$\inf\{(x, Ax)_2 \mid \|x\|_2 = 1\} = f(\hat{x}) = \hat{\lambda} = \lambda_{\min}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min} &= \min_{\|x\|_2=1} \underbrace{x^T A x}_{(x,Ax)_2} = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \underbrace{\frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}}_{\text{Rayley-Quotient}} \\
\lambda_{\max} &= \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.
\end{aligned}$$

$\lambda_{\min}$ bzw. $\lambda_{\max}$ sind der kleinste bzw. größte Eigenwert von A.

Kapitel 5

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

5.1 Explizite Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (DGLn) sind Gleichungen der Form

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

oder

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{explizite Form}$$

für eine gesuchte Funktion $y = y(t),\ t \in I,\ I \subset \mathbb{R}$ „Zeitinvervall“. Differentialgleichungen n-ter Ordnung sind äquivalent zu speziellen Systemen von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Betrachte $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (sei $y\colon I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$). Definiere Hilfsvariablen:

$$\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= y' \\ &\vdots \\ x_n &:= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

also $x \in \mathbb{R}^n$. Ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ist dann

$$x' = \tilde{f}(t, x), \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x) \end{pmatrix}$$

Ein allgemeines System von Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Form

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

Notationen: $x' = f(t, x), \dot{x} = f(t, x), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$ (Dynamischer Prozess, der sich mit der Zeit ändert.)

Beispiel 5.1. 1. einfache lineare Differentialgleichung

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

hat die Lösung $x(t) = c \cdot e^{\alpha t}$, da

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = c \cdot e^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot x(t)$$

2. Newton: Kraft = Masse · Beschleunigung.

$y(t) \in \mathbb{R}$	Ort eines Massenpunktes zur Zeit t
$y'(t) \in \mathbb{R}$	Geschwindigkeit
$y''(t) \in \mathbb{R}$	Beschleunigung

Kraftfunktion: $f(t, y, y') \in \mathbb{R}$.

$$my'' = f(t, y, y') \quad \text{DGL 2. Ordnung}$$

äquivalent zum System:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 & \text{mit } x_1 &= y, \\ x_2' &= \frac{1}{m} f(t, x_1, x_2) & x_2 &= y' \end{aligned}$$

3. Räuber-Beute-Gleichungen (Lotka-Volterra-Gleichungen)

$N_1 = N_1(t)$	Anzahl von Beute
$N_2 = N_2(t)$	Anzahl von Räuber
$N_1' = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2$	$\alpha > 0$ Reproduktionsrate der Beute
	$\beta > 0$ Fressrate der Räuber pro Beute
$N_2' = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2$	$\gamma > 0$ Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist
	$\delta > 0$ Reproduktionsrate der Räuber pro Beute

4. SIR - Modell aus Epidemiologie (z.B. Corona):

succeptible	infected	removed
$S(t)$	$I(t)$	$R(t)$

$$\begin{aligned} N &= I + S + R \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \nu N - \beta \frac{SI}{N} - \mu S \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= \gamma I - \mu R \end{aligned}$$

Dabei sei

γ die Rate, mit der Infizierte genesen oder sterben,
μ die allgemeine Sterberate pro Person,
ν die Geburtsrate pro Person,
β die Anzahl neuer Infektionen, die ein erster infektiöser Fall pro Zeit verursacht und
$\frac{\beta}{N}$ die Transmissionsrate.

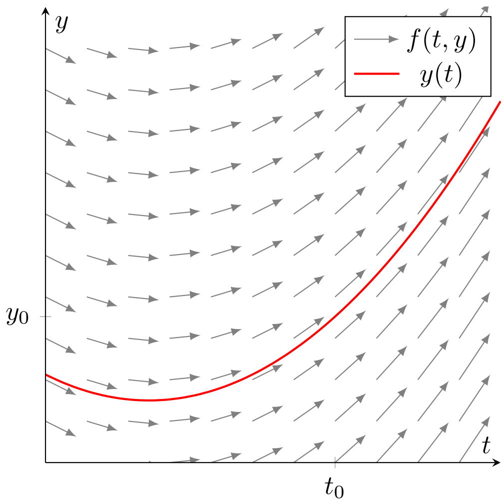


Abbildung 5.1: Veranschaulichung: Richtungsfeld für DGL der Form $y' = f(t,y)$

Definition 5.2 (System erster Ordnung)**.** Sei $D = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(t,y) \tag{$\star$}$$

ein System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Eine Lösung von ($\star$) ist eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ mit

(a) $\mathrm{Graph}(y) := \{(t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \in I\} \subset D$ und

(b) $y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I$.

Bemerkung 5.3. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ Dann ist

$$\begin{aligned} (\star) \Leftrightarrow y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Definition 5.4 (Anfangswertaufgabe/Anfangswertproblem)**.** AWA zu ($\star$) ist:

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \quad t \in I \\ y(t_0) &= y_0 \qquad\qquad \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Gesucht wird eine differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ derart, dass

(a) $\mathrm{Graph}(y) \subset D$

(b) $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in I$

(c) $y(t_0) = y_0$

Satz 5.5 (DGL $\leftrightarrow$ Integralgleichung). Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$ und $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig mit Graph$(y) \subset D$, $t_0 \in I$. Dann gilt

$$y \text{ löst AWA } y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I$$

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei y eine Lösung von AWA. Dann ist y diffbar mit $y'(t) = f(t, y(t))$.

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} y'(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{HDI}}{=} y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

"$\Leftarrow$". Sei die Integralgleichung erfüllt. Falls $t = t_0 \implies y(t_0) = y_0 \implies$ (c). Aus dem HDI folgt komponentenweise $y'(t) = f(t, y(t)) \implies y$ löst AWA. $\square$

5.2 Anfangswertaufgaben: Existenz von Lösungen

Satz 5.6 (Existenzsatz von Peano).
Die Funktion $f(t,x)$ sei stetig auf dem $(n+1)$-dimensionalen Zylinder

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \le \alpha,\ \|x - y_0\| \le \beta\}$$

Dann existiert eine Lösung $y(t)$ von AWA auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$ mit

$$T := \min_{y(t)} \left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\},\ M := \max_{(t,x) \in D} \|f(t,x)\|$$

Reminder:

1. Gleichmäßige Stetigkeit:
$$f\colon D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$$
ist gleichmäßig stetig in D, falls $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, sodass $\forall x, x_0 \in D$ gilt
$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

2. Gleichgradige Stetigkeit: Sei $\mathcal{F} \subset C[a,b]$. Dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass $\forall f \in \mathcal{F}$ gilt
$$\forall t, t' \in [a,b],\ |t - t'| < \delta \implies \|f(t) - f(t')\| < \varepsilon$$

3. Satz von Arzela-Ascoli: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C[a,b]$, die gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist, d.h.
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$$
und
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}\colon \max_{\substack{t,t' \in [a,b] \\ |t-t'| \le \delta}} \|f_n(t) - f_n(t')\| < \varepsilon.$$
Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche gegen $f \in C[a,b]$ konvergiert, d.h.
$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0$$

4. Dreiecksungleichung für Integrale. Sei $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann
$$\left\| \int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|y(t)\|\,\mathrm{d}t\,,$$
hier:
$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. (Satz von Peano)
Idee: Konstruiere eine Folge stetiger Funktionen (Eulersches Polygonzugverfahren). Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt dann, dass es eine Teilfolge gibt, die gegen eine Lösung von AWA konvergiert.
O.B.d.A. betrachte Halbintervall $I = [t_0, t_0 + T]$. Sei $h > 0$ Schrittweitenparameter ($h \to 0$). Wähle eine äquidistante Unterteilung des Intervalls I.
$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T, \quad h = |t_k - t_{k-1}|$$
Eulersches Polygonzugverfahren:

- Starte mit $y_0^h := y_0$.
- Für $n \geq 1$, berechne $y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$.

Definiere die stückweise lineare Funktion $y^h(t)$
$$y^h(t) := y_{n-1}^h + (t - t_{n-1})f(t_{n-1}, y_{n-1}^h), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad \forall n \geq 1$$

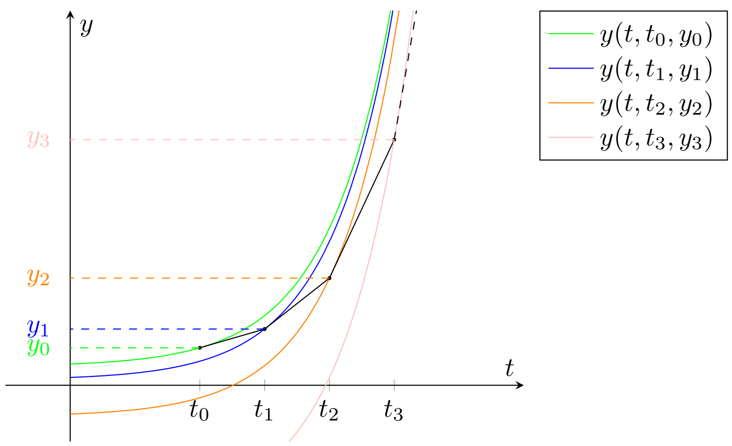


Abbildung 5.2: Eulersches Polygonzugverfahren, Steigung der Tangenten ist $f(t, y)$

1) **z.Z.** dass dieses Verfahren durchführbar ist, d.h. Graph$(y^h) \subset D$. Sei $(t, y^h(t)) \subset D$ für $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$. Dann gilt
$$\underbrace{(y^h(t))'}_{:=\frac{\mathrm{d}y^h(t)}{\mathrm{d}t}} \equiv f(t_{k-1}, y_{k-1}^h), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]$$

Nach Konstruktion gilt für $t \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\begin{aligned}
y^h(t) - y_0 &= y^h(t) - y^h_{k-1} + y^h_{k-1} - y^h_{k-2} + \dots + y^h_1 - y^h_0 \\
&= y^k(t) - y^h_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (y^h_i - y^h_{i-1}) \\
&= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} h \cdot f(t_{i-1}, y^h_{i-1}) \\
\implies \left\| y^h(t) - y_0 \right\| &\le (t - t_{k-1}) \left\| f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) \right\| + h \sum_{i=1}^{k-1} \left\| f(t_{i-1}, y^h_{i-1}) \right\| \\
&\le (t - t_{k-1}) \cdot M + \underbrace{h(k-1)}_{= t_{k-1} - t_0} \cdot M \\
&= (t - t_0) \cdot M \\
&\le T \cdot M \\
&= \min\left\{ \alpha, \frac{\beta}{M} \right\} \cdot M \\
&\le \beta
\end{aligned}$$

Also ist $(t, y^h(t)) \in D$ für $t_{k-1} \le t \le t_k$. Mit Annahme folgt $(t, y^h(t)) \in D$ für $t_0 \le t \le t_k \implies \mathrm{Graph}(y^h) \subset D$.

2) (a) **z.Z.** dass die Funktionenfamilie $\{y^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig ist. Seien dafür $t, t' \in I$, $t' \le t$ beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $t' \in [t_{j-1}, t_j]$ für ein $t_j \le t_k$.

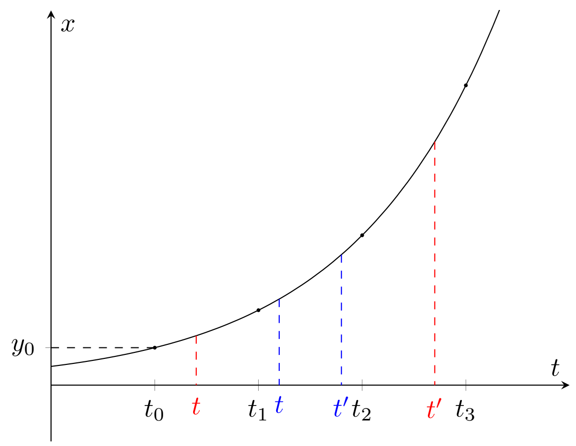


Abbildung 5.3: Blau: erster Fall, Rot: zweiter Fall

- $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\begin{aligned}
y^h(t) - y^h(t') &= y^h_{k-1} + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) \\
&\quad - (y^h_{k-1} + (t' - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1})) \\
&= (t - t') f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) \\
\implies \left\| y^h(t) - y^h(t') \right\| &\le |t - t'| \cdot M
\end{aligned}$$

- $t_j < t_k$:

$$\begin{aligned}
y^h(t) - y^h(t') &= y^h(t) - y^h_{k-1} + y^h_{k-2} - \cdots - y^h_{j-1} + y^h_{j-1} - y^h(t') \\
&= y^h(t) - y^h_{k-1} + \sum_{i=j}^{k-1} (y^h_i - y^h_{i-1}) + y^h_{j-1} - y^h(t') \\
&= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) + \sum_{i=j}^{k-1} h f(t_{i-1}, y^h_{i-1}) \\
&\quad + (t_{j-1} - t') f(t_{j-1}, y^h_{j-1}) \\
&= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) + \sum_{i=j+1}^{k-1} h f(t_{i-1}, y^h_{i-1}) \\
&\quad + h f(t_{j-1}, y^h_{j-1}) + (t_{j-1} - t') f(t_{j-1}, y^h_{j-1}) \\
&= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^h_{k-1}) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, y^h_{i-1}) \\
&\quad + (\underbrace{h + t_{j-1}}_{t_j} - t') f(t_{j-1}, y^h_{j-1})
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left\|y^h(t) - y^h(t')\right\| \le (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_j)M + (t_j - t')M = |t - t'|M$$

Wählt man für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ also $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, so gilt $\forall h$

$$|t - t'| < \delta \implies \left\|y^h(t) - y^h(t')\right\| < \varepsilon$$

Daher ist $\{y^h\}_{h>0}$ gleichgradig stetig (sogar gleichgradig Lipschitz-stetig).

(b) **z.Z.** y^h ist gleichmäßig beschränkt. Es gilt $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\left\|y^h(t)\right\| &= \Big\|y^h(t) - \underbrace{y_0}_{y^h(t_0) = y_0} + y_0\Big\| \\
&\le \underbrace{\left\|y^h(t) - y_0\right\|}_{\text{siehe 1)}} + \|y_0\| \\
&\le M \cdot T + \|y_0\|
\end{aligned}$$

Also ist y^h gleichmäßig beschränkt.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert eine Nullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion $y \colon I \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\max_{t \in I} \left\|y^{h_i} - y(t)\right\| \xrightarrow{i \to \infty} 0$$

Offenbar ist $\operatorname{Graph}(y) \subset D$.

3) **z.Z.** $y(t)$ erfüllt die Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ oder äquivalent dazu: $y(t)$ erfüllt die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

Sei dazu $t \in [t_{k-1}, t_k] \subseteq I$, $y^i(t) := y^{h_i}(t)$. Für ein i gilt

$$\begin{aligned}
y^i(t) &= y^i_{k-1} + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) \\
&= y^i_{k-2} + (t_{k-1} - t_{k-2}) f(t_{k-2}, y^i_{k-2}) + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) \\
&\vdots \\
&= y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}, y^i_{j-1}) + (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) \\
&= y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, y^i_{j-1}) \,\mathrm{d}s + \int_{t_{k-1}}^{t} f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} f(s, y^i(s)) \,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, y^i(s)) \,\mathrm{d}s \\
&= y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(t_{j-1}, y^i_{j-1}) - f(s, y^i(s)) \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t} (f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) - f(s, y^i(s))) \,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} f(s, y^i(s)) \,\mathrm{d}s\,. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Die Funktionen der Folge $(y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind gleichgradig stetig, d.h. $\forall i$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta_{\varepsilon'}$ s.d.

$$|t - t'| < \delta_{\varepsilon'} \implies \|y^i(t) - y^i(t')\| < \varepsilon'.$$

Da D kompakt, ist die stetige Funktion $f(t, x)$ auch gleichmäßig stetig. Damit folgt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon' < \varepsilon$, $\exists \delta_{\varepsilon'}$, s.d.

$$|t - t'| < \delta_{\varepsilon'}, \|y^i(t) - y^i(t')\| < \varepsilon' \implies \|f(t, y^i(t)) - f(t', y^i(t'))\| < \varepsilon.$$

Falls h_i hinreichend klein folgt damit $\forall k$

$$\max_{s\in[t_{k-1}, t_k]} \|f(t, y^i(t)) - f(s, y^i(s)\| \le \varepsilon. \qquad (5.2)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left\| y^i(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y^i(s)) \,\mathrm{d}s \right\| &\overset{5.1}{=} \Bigg\| \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f(t_{j-1}, y^i_{j-1}) - f(s, y^i(s)) \big) \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t} \big(f(t_{k-1} y^i_{k-1}) - f(s, y^i(s)) \big) \,\mathrm{d}s \Bigg\| \\
&\le \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f(t_{j-1}, y^i_{j-1}) - f(s, y^i(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_{k-1}}^{t} \|f(t_{k-1}, y^i_{k-1}) - f(s, y^i(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\overset{5.2}{\le} \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}s + \varepsilon \int_{t_{k-1}}^{t} \mathrm{d}s \\
&= \varepsilon |t - t_0|
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Bigg\| \underbrace{y^i(t)}_{\xrightarrow{i\to\infty} y(t)} - y_0 - \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, y^i(s))}_{\xrightarrow{i\to\infty} f(s, y(s))} \,\mathrm{d}s \Bigg\| \le \varepsilon |t - t_0|$$

Also folgt

$$\left\| y(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right\| \le \varepsilon |t - t_0|.$$

Da ε beliebig ist, folgt damit

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

□

Bemerkung 5.7 (Bedeutung des Existenzsatz von Peano)**.** Für die lokale Lösbarkeit des Systems $y' = f(t,y)$ reicht die Stetigkeit der rechten Seite. Aber auch wenn $f(t,y)$ auf einem Streifen $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ stetig ist, kann nicht erwartet werden, dass die Lösung der AWA im Intervall $[a,b]$ definiert ist.

Zum Beispiel: $y' = 1 + y^2$. $f(t,y) = 1 + y^2$ ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Als Lösung folgt $y = \tan(t+c)$, denn

$$y' = \frac{1}{\cos^2(t+c)} = \frac{\cos^2(t+c) + \sin^2(t+c)}{\cos^2(t+c)} = 1 + \tan^2(t+c) = 1 + y^2.$$

Das heißt Lösungen sind nur in Intervallen der Länge π definiert. Der Satz von Peano macht eine Aussage über die Größe des Existenzintervalls (die nur von Stetigkeitseigenschaften von $f(t,x)$ abhängig ist).

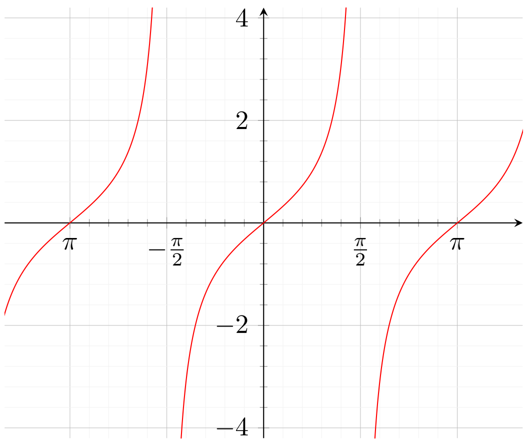


Abbildung 5.4: Lösung $y = \tan(t+c)$ nur in Intervallen der Länge π definiert.

Satz 5.8 (Fortsetzungssatz)**.** Sei $f(t,x)$ stetig auf $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, D abgeschlossen und $(t_0, y_0) \in D$. Sei weiter $y(t)$ Lösung der AWA für $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Dann ist y nach rechts und links auf ein maximales Existenzintervall $I_{\max} = (t_0 - T_*, t_0 + T^*)$ bis zum Rand von D (stetig diff'bar) fortsetzbar.

Beweis. Wiederholte Anwendung des Satz von Peano (siehe R.R. S. 111). □

Bemerkung 5.9. Die maximal fortgesetzten Lösungen nach links und rechts laufen bis der Graph von y an den Rand von D stößt. Dabei ist es möglich, dass

$$\mathrm{Graph}(y) = \{(t, y(t)), t \in I_{\max}\}$$

unbeschränkt ist, weil $t \to t_0 + T^* = \infty$ oder $\|y(t)\| \xrightarrow{t \to t_0 + T^*} \infty$.

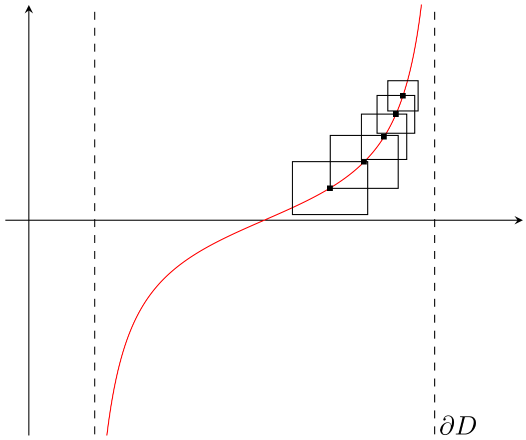


Abbildung 5.5: Schrittweise Fortsetzung einer Lösung bis zum Rand von D

Korollar 5.10 (Globale Existenz)**.** Sei $f(t, x)$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und stetig. Seien alle lokalen Lösungen $y(t)$ beschränkt durch eine stetige Funktion $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\|y(t)\| \leq \rho(t), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Dann ist y fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Wegen der Schranke, kann keine lokale Lösung auf einem beschränkten Zeitintervall einen unbeschränkten Graphen haben. Also ist y fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$. □

Satz 5.11 (Regularitätssatz)**.** Sei y eine Lösung der AWA $y' = f(t, y)$ auf dem Intervall I und sei $f \in C^m(D)$ mit $m \geq 1$. Dann gilt $y \in C^{m+1}(I)$.

Beweis. Da $y(t)$ Lösung, folgt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I.$$

Sei nun $f \in C^1(D)$. Dann ist y zweimal stetig differenzierbar mit

$$y''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, y(t)) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t))}_{\text{stetig}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t))}_{\text{stetig}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{=f \text{ also stetig}}.$$

Durch Wiederholung dieses Arguments folgt $y \in C^{m+1}$ falls $f \in C^m(D)$ ist. □

Beispiel 5.12. Was kann passieren, falls $f(t, x)$ nicht stetig ist? Beispiel: Coulomb Reibung. Sei $c > 0$ und $v(0) = v_0$.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= -c \cdot \operatorname{sign}(v). \end{aligned}$$

Lösung: $v(t) = v_0 - ct$. Lösungen der DGL existieren ab $t = \frac{v_0}{c}$ nicht. Abhilfe: Philipov Regel (siehe Literatur).

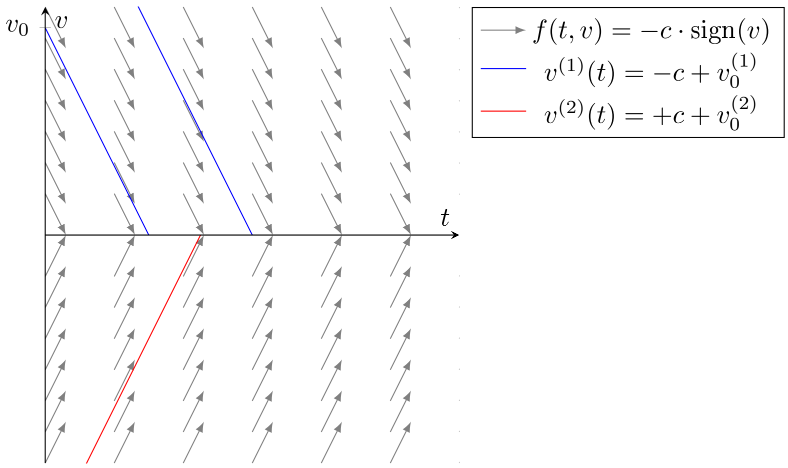


Abbildung 5.6: Mögliche Lösungen der DGL $\dot{v} = -c \cdot \operatorname{sign}(v)$ mit $v_0^{(1)} > 0$ und $v_0^{(2)} < 0$. Ab $t = \frac{v_0}{c}$ existiert keine Lösung.

Beispiel 5.13 (Uneindeutigkeit von AWA)**.** Sei $y' = f(t,y) := \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(t_0) = y_0$. Es ist $f(t,y)$ stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Für $y_0 \geq 0$ gilt $\forall t_0 \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = \frac{(t - t_0 + 2\sqrt{y_0})^2}{4} \qquad t_0 - 2\sqrt{y_0} \leq t < \infty$$

Für $y_0 \leq 0$ gilt $\forall t_0 \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = -\frac{(t - t_0 - 2\sqrt{-y_0})^2}{4} \qquad -\infty < t \leq t_0 + 2\sqrt{-y_0}$$

Für $y_0 = 0$ ist jedoch $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ auch

$$y(t) = 0.$$

eine Lösung der AWA.

Falls $y_0 > 0$ oder $y_0 < 0$ ist $y(t; t_0, y_0)$ eindeutig bestimmt, aber für $y(t_0) = 0$ existieren unendlich viele Lösungen.

Beobachtung: $f(t,x)$ ist stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aber $f(t,x)$ ist nicht Lipschitz stetig in $(t,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

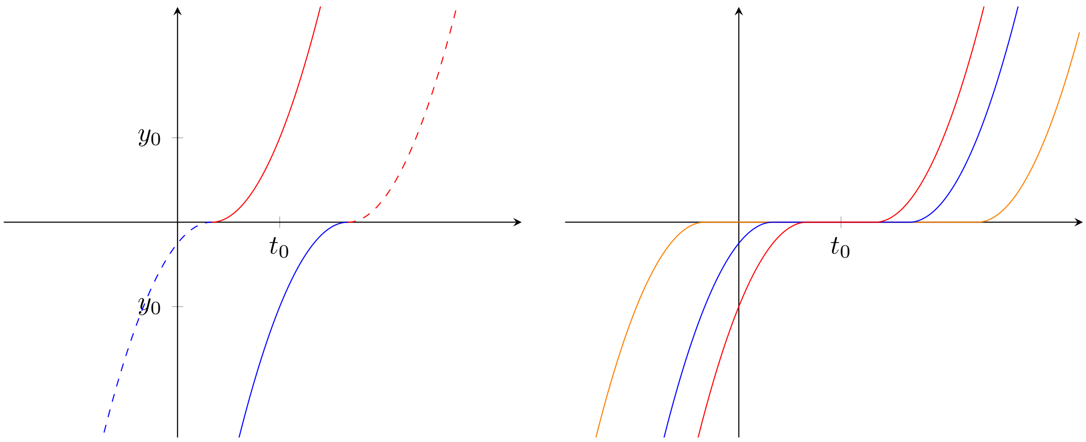
5.3 Eindeutigkeit und lokale Stabilität

Definition 5.14 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$. f ist in D Lipschitz-stetig bzgl. x mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, falls $\forall (t,x), (t,\tilde{x}) \in D$ gilt

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|.$$

f ist lokal Lipschitz-stetig bzgl. x in D, falls für alle Punkte $(t,x) \in D$ eine Umgebung U existiert, s.d. f in $D \cap U$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

Beispiel 5.15. (1) Sei $D = \mathbb{R} \times G$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar nach x mit $\sup_{x \in G} \left\| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\| \leq L(t)$, dann ist f Lipschitz-stetig bezüglich x.



(a) Lösungen für $y_0 > 0$ (rot) bzw. $y_0 < 0$ (blau) und ihre Fortsetzungen.

(b) Für $y_0 = 0$ existieren beliebig viele zusammengesetzte Lösungen.

Abbildung 5.7: Zur Uneindeutigkeit von AWA

Beweis.

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \overset{4.21}{=} \left\| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,s)\,\mathrm{d}s\,(x-\tilde{x}) \right\| \le L(t)\|x-\tilde{x}\|.$$

□

(2) $f(y) = \sqrt{y}$, $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist nicht Lipschitz-stetig, denn $|f(y) - f(0)| = \sqrt{y}$ und $\forall L \ge 0$ $\exists y \in [0,\infty[$ mit $|\sqrt{y}| \ge L \cdot |y|$.

(3) $f(y) = \sqrt{y}$, $f\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $y_0 \in]0,\infty[$ fest. Betrachte $U = \left[\frac{y_0}{2}, \infty\right] \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $|f'(y)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$. Dann folgt

$$\max_{x \in U} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y_0}}.$$

Damit ist mit (1) f Lipschitz-stetig auf U. □

Lemma 5.16 (von Gronwall)**.** Sei $w(t) \ge 0$ stückweise stetig und genüge für $a, b \in \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$w(t) \le a \int_{t_0}^t w(s)\,\mathrm{d}s + b, \quad t \ge t_0.$$

Dann gilt

$$w(t) \le e^{a(t-t_0)} b, \quad t \ge t_0.$$

Beweis. Sei $t \ge t_0$. Betrachte die Funktion $\psi(t) := a \int_{t_0}^t w(s)\,\mathrm{d}s + b$. Es gilt $\psi'(t) = aw(t)$ und nach Voraussetzung

$$\psi'(t) = aw(t) \le a \left(a \int_{t_0}^t w(s)\,\mathrm{d}s + b \right) = a\psi(t).$$

Betrachte nun $e^{-at}\psi(t)$ und berechne

$$(e^{-at}\psi(t))' = -ae^{-at}\psi(t) + e^{-at}\psi'(t) = e^{-at}\underbrace{(\psi'(t) - a\psi(t))}_{\leq 0} \leq 0. \tag{5.3}$$

Die Funktion $e^{-at}\psi(t)$ ist also monoton fallend. Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{-at}\psi(t) &\overset{\text{mon. fallend}}{\leq} e^{-at_0}\psi(t_0) = e^{-at_0}b \\ e^{-at}w(t) &\overset{(5.3)}{\leq} e^{-at}\psi(t) \leq e^{-at_0}b \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$w(t) \leq e^{a(t-t_0)}b.$$

□

Satz 5.17 (Stabilitäts- und Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $f(t,x)$ stetig auf $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ und lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Seien y, v zwei beliebige Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$$

auf einem gemeinsamen Existenzintervall I. Dann gilt

$$\|y(t) - v(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|y(t_0) - v(t_0)\|, \quad t \in I, t \geq t_0,$$

wobei $t_0 \in I$ und L die Lipschitz-Konstante $L = L_K$ von $f(t,x)$ auf $K \subseteq D$ mit K beschränkt und Graph$(y) \subseteq K$, Graph$(v) \subseteq K$.

Weiterhin: Falls $y(t_0) = v(t_0)$ (d.h. y und v lösen AWA $y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0$), dann gilt $y(t) = v(t)$, $\forall t \in I$, d.h. die lokale Lösung der AWA (nach Peano) ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $K \subseteq D$ eine beschränkte Teilmenge und Graph$(y) \subseteq K$, Graph$(v) \subseteq K$. Betrachte

$$\begin{aligned} h(t) := y(t) - v(t) &\overset{\text{Integralform}}{=} y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s - v(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, v(s))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_0}^t \left(f(s,y(s)) - f(s,v(s))\right)\mathrm{d}s + y(t_0) - v(t_0) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|h(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s,y(s)) - f(s,v(s))\|}_{\leq L_k\|y(s)-v(s)\|}\,\mathrm{d}s + \|y(t_0) - v(t_0)\| \\ &\overset{\text{Lipschitz}}{\leq} L_K\int_{t_0}^t \|h(s)\|\,\mathrm{d}s + \|y(t_0) - v(t_0)\| \end{aligned}$$

Damit folgt mit Lemma 5.16

$$\|h(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\|y(t_0) - v(t_0)\|, \quad t \geq t_0.$$

Seien nun $y(t)$ und $v(t)$ zwei Lösungen der AWA

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in I = [t_0, t_0 + T], T \text{ aus Peano} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Aus
$$\|y(t) - v(t)\| \le e^{L(t-t_0)}\|y_0 - y_0\| = 0, \quad t \in I,$$
folgt $y(t) = v(t)$ auf dem gemeinsamen Existenzintervall I. $\square$

Satz 5.18 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Dann gilt $\forall (t_0, y_0) \in D$, $\exists \varepsilon > 0$ und eine Lösung der AWA
$$\begin{aligned} &y\colon I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \\ &y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \\ &y(t_0) = y_0. \end{aligned}$$

Beweis. Unabhängig vom Satz von Peano, basiert auf dem Fixpunktsatz von Banach.

1) Sei $\delta > 0$ s.d.
$$K := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \le \delta, \|x - y_0\| \le \delta\} \subseteq D$$
und $f(t,x)$ auf K Lipschitz-stetig ist, d.h. es ex. ein $L_K \ge 0$, s.d.
$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L_K\|x - \tilde{x}\|, \quad (t,x),(t,\tilde{x}) \in K.$$
K ist kompakt und f stetig, d.h. f ist beschränkt auf K, d.h. $\exists M \ge 0$ s.d. $\|f(t,x)\| \le M$, $(t,x) \in K$. Wir setzen
$$\varepsilon := \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L_K}\right), \quad I_\varepsilon := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$
Definiere Vektorraum $V := C(I_\varepsilon)$ mit Norm $\|y\|_\infty = \max_{t \in I_\varepsilon} \|y(t)\|$. Dann ist V ein Banach-Raum.

2) Definiere auf V die Abbildung $g\colon V \to V$
$$g(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I_\varepsilon.$$
Betrachte Teilmenge
$$V_0 := \left\{ v \in V \;\middle|\; \max_{t \in I_\varepsilon} \|v(t) - y_0\| \le \delta \right\} \subseteq V.$$
Für $y \in V_0$ gilt für $t \in I_\varepsilon$
$$\begin{aligned} \|g(y)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\|\,\mathrm{d}s \\ &\overset{f \text{ beschr.}}{\le} M \int_{t_0}^t \mathrm{d}s \\ &= M|t - t_0| \le M\varepsilon \le \delta. \end{aligned}$$

Damit folgt also $g(V_0) \subseteq V_0$. Seien nun $y, v \in V_0$:

$$\begin{aligned}
\|g(y)(t) - g(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, v(s)))\, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, v(s))\|\, \mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Lipschitz}}{\leq} \int_{t_0}^{t} L_K \|y(s) - v(s)\|\, \mathrm{d}s \\
&\leq L_k \max_{s \in [t_0, t]} \|y(s) - v(s)\| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \\
&\leq L_k \|y - v\|_\infty \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \varepsilon} \\
&\underset{\varepsilon \leq \frac{1}{2L_K}}{\leq} \frac{1}{2} \|y - v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Damit ist g auf V_0 eine Kontraktion und hat damit mit Satz 3.20 genau einen Fixpunkt y^*, d.h.

$$y^*(t) = g(y^*)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^*(s))\, \mathrm{d}s\,, \quad t \in I_\varepsilon .$$

Damit ist $y^*(t)$, $t \in I_\varepsilon$ eindeutige lokale Lösung der AWA $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

$\square$

Bemerkung 5.19. (1) Der Beweis liefert ein Verfahren für beliebiges y_0 und $t \in I_\varepsilon$:

$$y^k(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^{k-1}(s))\, \mathrm{d}s \xrightarrow{k \to \infty} \text{Lösung der AWA.}$$

(2) Ohne die Forderung der Lipschitz-Stetigkeit geht die Eindeutigkeit der Lösung verloren (siehe Beispiel 5.13), aber die Existenz gilt nach dem Satz von Peano immer noch.

5.4 Globale Stabilität

Definition 5.20 (Exponentielle Stabilität)**.** Sei $y(t)$ die globale Lösung einer AWA. $y(t)$ heißt exponentiell stabil, falls Konstanten $\delta, \alpha, A > 0$ existieren, sodass $\forall t_* \geq t_0$ und $\forall w_* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w_*\| < \delta$ die gestörte AWA

$$v'(t) = f\left(t, v(t)\right), \quad t \geq t_*, \quad v(t_*) = y(t_*) + w_*$$

eine globale Lösung $v(t)$ hat, für welche gilt:

$$\|v(t) - y(t)\| \leq A e^{-\alpha(t - t_*)} \|w_*\|\,, \quad t \geq t_* .$$

Definition 5.21 (Monotone AWA)**.** Die Funktion $f(t, x)$ heißt stark monoton falls ein $\lambda > 0$ existiert, sodass für alle $(t, x), (t, y) \in D$ gilt:

$$-\left(f(t, x) - f(t, y), x - y\right) \geq \lambda \left\|x - y\right\|^2$$

Satz 5.22 (Globaler Stabilitätssatz)**.** Sei $f(t,x)$ einer AWA stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich x und stark monoton. Dann sind alle Lösungen der AWA global und exponentiell stabil, mit δ beliebig und $\alpha = A = 1$.
Zusatz: Gilt $\sup_{t\geq t_0} \|f(t,0)\| < \infty$, dann sind alle Lösungen gleichmäßig beschränkt.

Beweis. 1) Die Lösungen der AWA

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

und der gestörten AWA

$$v'(t) = f(t, v(t)), \quad t \geq t_* \geq t_0, \quad v(t_*) = y(t_*) + w_*$$

existieren global und sind eindeutig.
Da f Lipschitz-stetig ist gilt:

$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leq L\|x\| + \|f(t,0)\|.$$

Für die Lösung $y(t)$ gilt:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$$

und damit

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s))\| \,\mathrm{d}s\\ &\leq \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} L\|y(s)\| \,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \|f(s,0)\| \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$\|f(s,0)\|$ stetig auf $[t,t_0]$, also gleichmäßig beschränkt, d.h. es existiert ein $M_t > 0$ sodass für alle $s \in [t_0, t]$ gilt $\|f(s,0)\| \leq M_t$ und damit:

$$\leq L\int_{t_0}^{t} \|y(s)\| \,\mathrm{d}s + \|y_0\| + M_t|t - t_0|$$

Mit dem Lemma von Gronwall für $w(t) = \|y(t)\|$ folgt:

$$\|y(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\left(\|y_0\| + M_t|t-t_0|\right).$$

Somit liefern der Satz von Peano und der Fortsetzungssatz, dass $y(t)$ auf dem maximalen Existenzintervall $I_{\max} = [t_0, t_{\max})$ existiert, wobei entweder $t_{\max} = \infty$ gilt, oder $t_{\max} < \infty$ mit $\max_{[t_0,t]} \|y(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Wir führen $t_{\max} < \infty$ mit $\max_{[t_0,t]} \|y(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ zum Widerspruch. Bereits gezeigt wurde, dass gilt:

$$\|y(t)\| \leq e^{L(t-t_0)}\left(\|y_0\| + M_t|t-t_0|\right) \leq e^{L(t_{\max}-t_0)}\left(\|y_0\| + M_{t_{\max}}|t_{\max}-t_0|\right)$$

Also ist $\|y(t)\|$ beschränkt für $t \to t_{\max}$. Dies ist ein Widerspruch, also gilt bereits $t_{\max} = \infty$. Damit existiert $y(t)$ für $t \in [t_0, \infty)$.

2) $y(t)$ ist exponentiell stabil. Dafür gilt es zu zeigen, dass für $t \geq t_*$:

$$\|v(t) - y(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_*)}\|w_*\|.$$

Sei $w(t) := v(t) - y(t)$. Dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|w(t)\|^2 = 2\,(w'(t), w(t)) = 2\,(f(t, v(t)) - f(t, y(t)), v(t) - y(t))$$

und da f stark monoton ist, folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|w(t)\|^2 \leq -2\lambda \|w(t)\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|w(t)\|^2 + 2\lambda \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Ferner gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{2\lambda(t-t_*)} \|w(t)\|^2\right) = \underbrace{e^{2\lambda(t-t_*)}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|w(t)\|^2 + 2\lambda \|w(t)\|^2\right)}_{\leq 0} \leq 0$$

Woraus wir folgern:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_*}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(e^{2\lambda(s-t_*)} \|w(s)\|^2\right) \mathrm{d}s = e^{2\lambda(t-t_*)} \|w(t)\|^2 - \|w(t_*)\|^2 \leq 0 \\
\Longrightarrow \quad & \|w(t)\|^2 \leq e^{-2\lambda(t-t_*)} \|w(t_*)\|^2 \\
\Longrightarrow \quad & \|w(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_*)} \|w(t_*)\| \\
\Longrightarrow \quad & \|v(t) - y(t)\| \leq e^{-\lambda(t-t_*)} \|w_*\|.
\end{aligned}$$

3) $y(t)$ ist gleichmäßig beschränkt falls $\sup_{t \geq t_0} \|f(t,0)\| < \infty$. Denn:
Es gilt:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \Longrightarrow \qquad y'(t) - f(t, y(t)) + f(t, 0) = f(t, 0).$$

Indem wir das Skalarprodukt mit $y(t)$ bilden, erhalten wir daraus:

$$(y(t), y'(t)) - (f(t, y(t)) - f(t, 0), y(t) - 0) = (f(t, 0), y(t)).$$

Außerdem gilt

$$(y(t), y'(t)) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2$$

und aufgrund der Monotonie:

$$(f(t, y(t)) - f(t, 0), y(t)) \leq -\lambda \|y(t)\|^2.$$

Somit können wir folgern:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2 + \lambda \|y(t)\|^2 \quad & \leq \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2 - (f(t, y(t)) - f(t, 0), y(t)) \\
& = \quad (f(t, 0), y(t)) \overset{\text{CSU}}{\leq} \|f(t, 0)\| \cdot \|y(t)\| \\
& \overset{2ab \leq a^2 + b^2}{\leq} \quad \frac{1}{2\lambda} \|f(t, 0)\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|y(t)\|^2
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2 + \lambda \|y(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda} \|f(t, 0)\|^2 \\
\Longrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2 + \lambda \|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|f(t, 0)\|^2.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $e^{\lambda(t-t_0)}$ liefert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{\lambda(t-t_0)} \|y(t)\|^2\right) = e^{\lambda(t-t_0)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|y(t)\|^2 + \lambda \|y(t)\|^2\right) \leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(t-t_0)} \|f(t, 0)\|^2$$

woraus folgt:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{\lambda(s-t_0)}\,\|y(s)\|^2\right)\,\mathrm{d}s = e^{\lambda(t-t_0)}\,\|y(t)\|^2 - \|y(t_0)\|^2 \le \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\,\|f(s,0)\|^2\,\mathrm{d}s$$

und ferner sogar

$$\begin{aligned}\|y(t)\|^2 &\le e^{-\lambda(t-t_0)}\,\|y_0\|^2 + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\,\|f(s,0)\|^2\,\mathrm{d}s\\ &\le e^{-\lambda(t-t_0)}\,\|y_0\|^2 + \frac{1}{\lambda}\max_{s\in[t_0,t]}\|f(s,0)\|^2\,e^{-\lambda(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Wir halten fest:

$$e^{-\lambda(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\,\mathrm{d}s = e^{-\lambda(t-t_0)}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda(t-t_0)} - \frac{1}{\lambda}\right) \le \frac{1}{\lambda}.$$

Somit können wir schließen:

$$\|y(t)\|^2 \le e^{-\lambda(t-t_0)}\,\|y_0\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\max_{s\in[t_0,t]}\|f(s,0)\|^2$$

□

5.5 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Definition 5.23 (Lineare AWA)**.** Sei $A(\cdot)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrixfunktion, sowie $b(\cdot)\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Vektorfunktion. Dann ist eine lineare AWA der Form:

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t), \quad t \ge t_0\\ y(t_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Satz 5.24 (Lösung einer linearen AWA)**.** Seien $A\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

1) Die lineare AWA besitzt eine eindeutige globale Lösung $y\colon [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$.
2) Falls $A(\cdot)$ gleichmäßig negativ definit auf $[t_0,\infty)$ ist und $b(\cdot)$ beschränkt ist, dann ist $y(t)$ beschränkt und exponentiell stabil.

Beweis. 1) Der Satz von Peano liefert die Existenz eines $T > 0$ sodass eine lokale Lösung $y\colon [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}^n$ der linearen AWA existieren, für welche gilt ($t \in [t_0, t_0+\infty]$):

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)y(s) + b(s))\,\mathrm{d}s\\ \implies \quad \|y(t)\| &\le \|y_0\| + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\|\cdot\|y(s)\| + \|b(s)\|)\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall für $w(t) = \|y(t)\|$ liefert für $t \in [t_0, t_0+T]$:

$$\|y(t)\| \le \exp\left(\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|\,\mathrm{d}s\right)\left(\|y_0\| + \int_{t_0}^{t}\|b(s)\|\,\mathrm{d}s\right)$$

Also ist $\|y(t)\|$ beschränkt durch ein $C(T, A(\cdot), b(\cdot)) > 0$. Nach Fortsetzungssatz ist der Graph von $y(t)$ fortsetzbar bis an den Rand von D. Damit existiert $y(t)$ für alle $t \geq t_0$.
$f(t,x)$ ist Lipschitz-stetig bezüglich x. Denn:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x-y\| .$$

Damit folgt die Eindeutigkeitsaussage aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

2) Sei $A(t)$ negativ definit, dann existiert ein $\lambda > 0$ sodass:

$$-\left(f(t,x) - f(t,y), (x-y)\right) = -\left(A(t)(x-y), (x-y)\right) \geq \lambda \|x-y\|^2 .$$

Sei $b(t)$ beschränkt, dann gilt $\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|f(t,0)\| = \sup_{t\in[t_0,\infty)} \|b(t)\| < \infty$. Damit folgt nach Satz 5.22, dass $y(t)$ beschränkt und exponentiell stabil ist.

□

Satz 5.25 (Homogene lineare Systeme)**.** Ein homogenes lineares System von DGLn ist der Form

$$y'(t) = A(t)y(t). \tag{5.4}$$

1) Die Menge der Lösungen bildet einen Vektorraum H.
2) Sei $\{y_0^1, \ldots, y_0^n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Seien $\{y^1, \ldots, y^n\}$ die Lösungen von AWA:

$$(y^i)' = A(t)y^i, \quad y^i(t_0) = y_0^i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Dann ist $\{y^1, \ldots, y^n\}$ eine Basis von H und es gilt $\dim(H) = n$.
3) Sei $\{y^1, \ldots, y^n\}$ eine Basis des Lösungsraums H, dann ist $\{y^1(t), \ldots, y^n(t)\}$ für $\forall t \geq t_0$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Beweis. 1) Sei H die Menge der Lösungen von (5.4). H ist ein $\mathbb{R}$-VR, denn:

- Nullfunktion erfüllt $0'(t) = A(t)0(t)$, also $0 \in H$.
- Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in H$, dann gilt:

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v' = \alpha A(t)u(t) + \beta A(t)v(t) = A(t)\left(\alpha u + \beta v\right).$$

Also $(\alpha u + \beta v) \in H$.

2) Sei $\{y_0^1, \ldots, y_0^n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Seien $\{y^1, \ldots, y^n\}$ die eindeutigen Lösungen der AWAn (nach Satz 5.24). Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sodass für $t \geq t_0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(t) = 0.$$

Für $t = t_0$ gilt dann $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_0^i = 0$, da die y_0^i linear unabhängig sind, folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt, dass die $y^i(t)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ linear unabhängig sind, also bereits, dass die y^i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ linear unabhängig sind.
Da es höchstens n linear unabhängige Anfangswerte gibt, sind nicht mehr als n Funktionen aus H linear abhängig, also $\dim(H) = n$.

3) Analog zu 2).

□

Definition 5.26. Eine Basis $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ des Lösungsraums H von $y'(t) = A(t)y(t)$ zu den Anfangswerten $\varphi^i(t_0) = e^i$ (e^i Standardbasisvektor) heißt Fundamentalsystem des linearen Systems von DGLn.
Die Matrix $\phi = \left[\varphi^1, \dots, \varphi^n\right]$ der Spaltenvektoren φ^i heißt Fundamentalmatrix des linearen Systems von DGLn.
Diese Matrix ist regulär und löst die AWA (komponentenweise):

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t), \quad t \geq t_0, \quad \phi(t_0) = \mathbb{I}.$$

Satz 5.27 (Inhomogene lineare Systeme)**.** Ein inhomogenes lineare System von DGLn ist der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Seien $A\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

1) Für konstantes $c \in \mathbb{R}^n$ ist

$$y_b(t) := \phi(t)\left(\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + c\right)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Systems.

2) Alle Lösungen der inhomogenen Gleichung haben die Form:

$$y(t) = y_b(t) + v(t),$$

wobei $v \in H$ (Lösungsraum des assoziierten homogenen Systems).

3) Gilt $c = y_0$, dann gilt $y_b(t_0) = y_0$.

Beweis. 1) Sei $\psi := \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + c$. Dann gilt für $t \geq t_0$: $\psi' = \phi^{-1}(t)b(t)$. Für $y_b = \phi\psi$ gilt dann:

$$y_b' = \phi'\psi + \phi\psi' = A\phi\psi + \phi\phi^{-1}b = Ay_b + b.$$

Also ist y_b eine Lösung des inhomogenen Systems und gilt $c = y_0$, dann löst y_b die AWA $y' = Ay + b$, $y(t_0) = y_0$. Daraus folgt 1) und 3).

2) Sei y eine zweite Lösung des inhomogenen Systems. Für $w = y - y_b$ gilt dann:

$$w' = y' - y_b' = Ay + b - (Ay_b + b) = A(y - y_b) = Aw.$$

Also bereits $w \in H$.

□

Bemerkung 5.28. (1) Die Lösung $y_b(t) = \phi(t)\left(\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + y_0\right)$ entspricht genau der Lösung

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right) b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

der skalaren linearen AWA $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ ($t \geq t_0$) (Variation der Konstanten).

(2) Für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) = Ay(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gibt es eine Lösungstheorie, die auf algebraische Argumente zurückgreift.

5.6 Randwertaufgaben

Bemerkung 5.29. Wir betrachten nun sogenannte Randwertaufgaben/Randwertprobleme der Form: $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $r\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), && t \in I = [a, b] \\ r(y(a), y(b)) &= 0 \end{aligned}$$

Gesucht ist eine stetig differenzierbare Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ die beide Bedingungen erfüllt. Die zweite Bedingung lässt sich verallgemeinern zu einer Mehrpunkt RWA:

$$r\left(y(t_1), \dots, y(t_k)\right) = 0.$$

Beispiel 5.30. Wann existieren solche Lösungen? Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$y'' + y = 0$$

für $t \in [0, \pi]$. Dies ist äquivalent zu folgenden System:

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Dieses Problem hat die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

1) Für $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$. $r = \begin{pmatrix} y_1(0) - y_1(\pi) \\ y_2(0) - y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0$ ist die Lösung des RWA $y(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi]$ eindeutig.

2) Für $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $r = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(\pi) \end{pmatrix} = 0$ hat das RWA unendlich viele Lösungen $y(t) = c_1 \sin(t)$ $(t \in [0, t])$.

3) Für $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $r = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1(\pi) - 1 \end{pmatrix} = 0$ hat das RWA keine Lösung.

Definition 5.31 (Allgemeine inhomogene lineare RWA)**.** Seien $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$ sowie $A\colon I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist eine allgemeine inhomogene lineare RWA der Form:

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + f(t), && t \in I \\ B_a y(a) + B_b y(b) &= g. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.32. Eine Lösung des inhomogenen DGL-System ist von der Form:

$$y(t, s) = \varphi^0(t) + \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi^i(t) = \varphi^0(t) + \phi(t)s.$$

Hier löst φ^0 die AWA:

$$(\varphi^0)'(t) = A(t)\varphi^0(t) + f(t), \quad t \geq a,\ \varphi^0(a) = 0.$$

φ^i $(i \in \{1, \dots, n\})$ lösen die AWA:

$$(\varphi^i)'(t) = A(t)\varphi^i(t), \quad t \geq a,\ \varphi^i(a) = e^i.$$

φ^0, φ^i $(i \in \{1, \dots, n\})$ sind eindeutige Lösungen, außerdem:

$$\phi(t) = \left[\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)\right].$$

Offenbar löst $y(t,s)$ die DGL:

$$y'(t,s) = (\varphi^0)'(t) + \sum_{i=1}^n s_i (\varphi^i)'(t) = A(t) \underbrace{\left(\varphi^0(t) + \sum_{i=1}^n s_i \varphi^i(t)\right)}_{y(t,s)} + f(t), \quad t \geq t_0.$$

Wie muss $s \in \mathbb{R}^n$ gewählt werden? Ziel: $s \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen, sodass gilt:

$$B_a y(a,s) + B_b y(b,s) = g.$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$B_a(\underbrace{\varphi^0(a)}_{=0} + \underbrace{\phi(a)}_{=\mathbb{I}} s) + B_b(\varphi^0(b) + \phi(b)s) = g.$$

Also:

$$(B_a + B_b\phi(b))\, s = g - B_b\varphi^0(b).$$

Satz 5.33 (Existenzsatz für lineare RWA)**.** Die lineare RWA besitzt eine eindeutige Lösung $y(t)$ für beliebige $f(t)$ und g genau dann, wenn $B_a + B_b\phi(b) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist, bzw. die assoziierte homogene RWA nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ hat.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Ist $B_a + B_b\phi(b) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so ist das System

$$(B_a + B_b\phi(b))\, s = g - B_b\varphi^0(b)$$

eindeutig lösbar für $s \in \mathbb{R}^n$ und somit löst $y(t,s)$ die RWA.
„$\Rightarrow$“: Die Lösung der RWA kann man darstellen als

$$y(t) = \varphi^0(t) + \phi(t)s, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

weil die Funktionen $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ eine Basis des Lösungsraum des assoziierten homogenen DGL bilden.
Für homogene RWA gilt $g - B_b\varphi^0(b) = 0$ und die Gleichung für s lautet

$$(B_a + B_b\phi(b))\, s = 0$$

Daraus folgen alle Behauptungen. □

Bemerkung 5.34. Die Lösung einer linearen RWA ist im Kern die Lösung eines LGS.

Nun betrachten wir die nichtlineare RWA

$$y' = f(t,y), \quad t \in [a,b], \qquad r(y(a), y(b)) = 0.$$

Frage: falls die nichtlineare RWA eine Lösung $y(t)$ besitzt, ist diese lokal eindeutig?
Also existiert eine Umgebung $U_R(y) = \{v \in C[a,b] \mid \|y - v\|_\infty < R\}$, sodass keine andere Lösung $\tilde{y} \neq y$ existiert?
Wir führen die Notationen

$$f'_x(t,x) = \left(\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$
$$r'_x(x,y) = \left(\frac{\partial r_i(x,y)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$
$$r'_y(x,y) = \left(\frac{\partial r_i(x,y)}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n$$

für die Jacobi-Matrizen von $f(t,\cdot)$, $r(\cdot,\cdot)$ ein.

Satz 5.35 (Lokale Eindeutigkeit)**.** Eine Lösung y von nichtlinearen RWA ist lokal eindeutig genau dann, wenn die lineare RWA

$$\begin{aligned} &v'(t) = f'_x(t, y(t))v(t), \qquad t \in I, \\ &r'_x(y(a), y(b)) \cdot v(a) + r'_y(y(a), y(b)) \cdot v(b) = 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $v \equiv 0$ besitzt.

Beweis. Siehe Skript von Rolf Rannacher Seite 128. $\square$

Kapitel 6

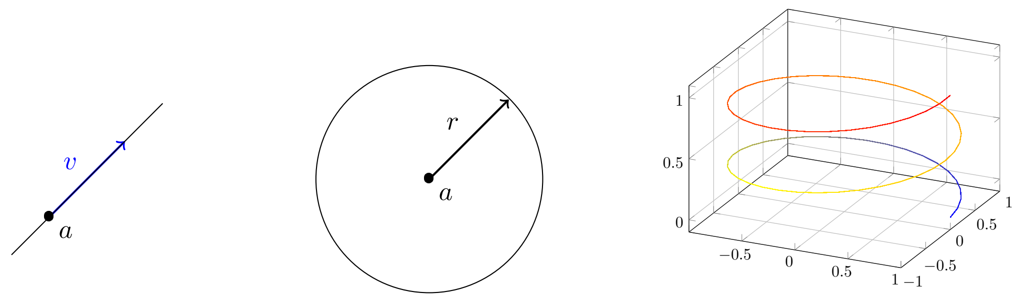
Kurven im $\mathbb{R}^n$

6.1 Kurven

Definition 6.1 (Kurve)**.** Eine Kurve γ im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, I Intervall (z.B. $I = [a,b]$ oder $I = \mathbb{R}$). Schreibweise:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt γ stetig $\Leftrightarrow$ γ_i stetig $\forall i = 1, \dots, n$.



(a) Beispiel 1, Gerade (b) Beispiel 2, Kreis (c) Beispiel 3, Helix

Beispiel 6.2. 1. Gerade in $\mathbb{R}^n$ durch einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

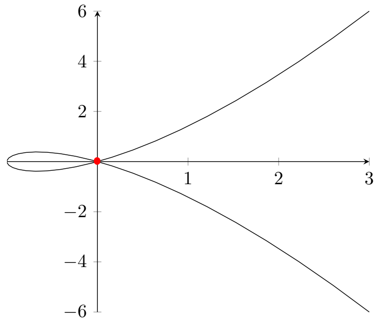
$$\gamma(t) = a + tv,\ I = \mathbb{R}.$$

2. Kreis in $\mathbb{R}^2$ um $a \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$

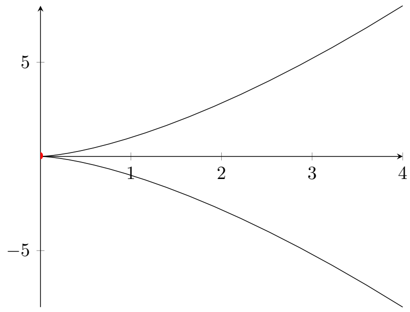
$$\gamma(t) = a + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

3. Helix in $\mathbb{R}^3$ mit $r > 0, c \neq 0$.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$



(a) Beispiel 4: nicht injektive Kurve, ● liegt bei $t = \pm 1$.



(b) Beispiel 5: Neilsche Parabel, ● liegt bei $t = 0$ und ist ein singulärer Punkt.

Definition 6.3 (Differenzierbarkeit).

1. γ heißt stetig differenzierbar, wenn $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ stetig differenzierbar sind. Dabei bezeichnet man
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$
als Tangential- bzw. Geschwindigkeitsvektor.
2. γ heißt regulär, wenn gilt: $\forall t \in I$ gilt $\gamma'(t) \neq 0$.
3. $r(t) \coloneqq \|\gamma'(t)\|_2 : I \to \mathbb{R}$ heißt Geschwindigkeit von γ.
$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{|\gamma_1'(t)|^2 + \dots + |\gamma_n'(t)|^2}$$

Beispiel 6.4.

1. Gerade: $\gamma(t) = a + v \cdot t$.
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v,\ r(t) = \|v\|_2 \overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \gamma \text{ ist regulär}$$
2. Kreis: $\gamma(t) = a + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
$$\gamma'(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} \gamma'(t) \neq 0\ \forall t,$$
da sin und cos keine gemeinsamen Nullstellen haben.
$$r(t) = \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r$$
3. Helix: $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)^T$
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ c \end{pmatrix} \neq 0\ (c \neq 0)$$
Außerdem ist
$$r(t) = \sqrt{r^2 + c^2} > 0$$

4. Kurven stellen nicht notwendig injektive Abbildungen dar.
$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t^3-t \end{pmatrix}$$
Das Bild von γ ist $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^2 + x^3\}$. Dabei ist $\gamma(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(1)$. Allerdings ist $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$ bei -1 gleich $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bei 1 gleich $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Neilsche Parabel $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, t^3)$. Das Bild von γ ist $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y = \pm\sqrt{x^3}\}$. Es gilt $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ und daher insbesondere $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher ist $\gamma(t)$ nicht regulär und $t = 0$ ist ein singulärer Punkt.

Definition 6.5 (Tangente)**.** Sei $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$. Sei ein $t_0 \in I$ regulär (d.h. $\gamma'(t_0) \neq 0$). Dann ist die Tangente an $\gamma(t_0)$ eine Gerade durch $\gamma(t_0)$ in Richtung $\gamma'(t_0)$
$$\{\gamma(t_0) + s\gamma'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

6.2 Die Bogenlänge

Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_M\}$, $t_i \in I$ eine Partition des Intervalls I. $\mathcal{Z}$ definiert ein Sehnenpolygon von γ mit Ecken $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_M)$ der Länge
$$S(\mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{M} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2, \; S(\mathcal{Z}) \in \mathbb{R}.$$
Sei $\mathcal{Z}^*$ eine weitere Partition des Intervalls I, die aus z durch Hinzunahme weiterer Teilungspunkte entsanden ist, dann gilt $S(\mathcal{Z}^*) \geq S(\mathcal{Z})$. Betrachte Teilintervall $[t_0, t_1]$ und sei $t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_K = t_1$, dann ist
$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| = \left\| \sum_{i=1}^{K} \gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{K} \|\gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1})\| \implies S(\mathcal{Z}) \leq S(\mathcal{Z}^*).$$
Seien $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ zwei Zerlegungen und $\mathcal{Z}^*$ eine gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt $S(\mathcal{Z}^*) \geq \max(S(\mathcal{Z}_1), S(\mathcal{Z}_2))$

Definition 6.6 (Rektifizierbarkeit)**.** Eine stetige Kurve $\gamma \in C^0(I;\mathbb{R}^n)$ heißt rektifizierbar, wenn die Menge aller Längen $S(\mathcal{Z})$ von Polygonen zu Partitionen $\mathcal{Z}$ von I beschränkt ist. In diesem Fall heißt $S(\gamma) := \sup\{S(\mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ Partition von } I\}$ die Länge von γ, in anderen Worten $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall$ Partitionen von I gilt:
$$\max_i |t_{i-1} - t_i| < \delta \implies |S(\mathcal{Z}) - S(\gamma)| < \varepsilon$$

Beispiel 6.7 (Lipschitz-stetige Kurven)**.** Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $|I| < \infty$, dann gilt für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von I:
$$S(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{M} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \overset{\gamma \text{ L-stetig}}{\leq} \sum_{i=1}^{M} L \cdot |t_i - t_{i-1}| = L \cdot |I|$$
Also ist γ rektifizierbar.

Satz 6.8 (Kurvenlänge stückweiser C^1-Kurven)**.** Sei $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ eine stetige Kurve mit $[a,b]$ kompakt, γ stückweise C^1, d.h. $\exists$ Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_M = b$ mit

$$\gamma|_{[s_{i-1},s_i]} \in C^1([s_{i-1},s_i],\mathbb{R}^n), \quad \forall i = 1,\ldots,M.$$

Dann ist γ rektifizierbar und hat die Länge

$$S(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^M \int_{s_{i-1}}^{s_i} \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t\,.$$

Insbesondere hat der Graph einer C^1-Funktion $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $\gamma_f(t) \coloneqq (t, f(t))^T$ die Länge

$$S(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = \{t_0,\ldots,t_N\}$ eine Partition, betrachte $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z} \cup \{s_0,\ldots,s_M\} = \{x_0,\ldots,x_K\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S(\mathcal{Z}) &\leq S(\mathcal{Z}^*) \\ &= \sum_{i=1}^K \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \sum_{i=1}^K \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\, \mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{\triangle-\text{UGl.}}{\leq} \sum_{i=1}^K \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Also ist γ rektifizierbar und $S(\gamma) \leq \int_a^b \|y'(t)\| \, \mathrm{d}t$. Z.Z. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Zerlegung mit

$$S(\mathcal{Z}) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon.$$

Fixiere dazu ein $\varepsilon > 0$. Wähle dann eine Treppenfunktion φ auf $[a,b]$ mit

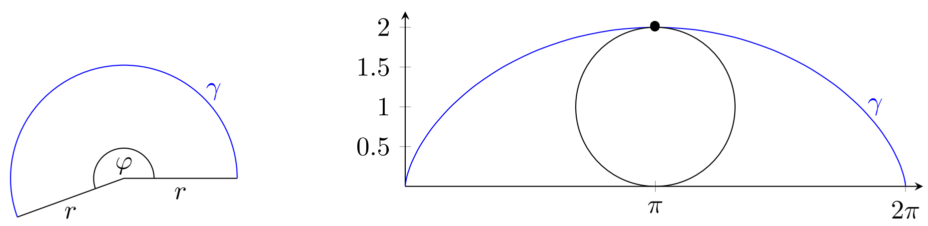
$$\|\gamma'(t) - \varphi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall t \in [a,b] \setminus \{s_0,\ldots,s_M\}$$

(φ existiert, weil $\gamma'(t)$ stückweise stetig ist). Wähle ferner eine (feine) Partition $a = t_0 < t_1 <$

$\dots < t_N = b$, s.d. $\varphi\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ konstant ist $\forall i = 1, \dots, N$. Dann gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
S(Z) &= \sum_{i=1}^{N} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t) + (\gamma'(t) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \left(\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| - \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t \right\| \right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \left(\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t_i - t_{i-1}| \right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t_i - t_{i-1}| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right\| - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{\varphi(t)=\text{const}}{=} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi(t)\|\ \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) + (\varphi(t) - \gamma'(t))\|\ \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{\text{analog}}{\geq} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t - \varepsilon = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t - \varepsilon
\end{aligned}
$$

Also existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $S(\mathcal{Z}) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t - \varepsilon$. Zusammen mit $S(y) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$ folgt $S(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ \mathrm{d}t$. $\square$



(a) Beispiel 1: Kreisbogen (b) Beispiel 2: Zykloide

Beispiel 6.9. 1. Kreisbogen: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$, $\gamma \in C^\infty([0, \varphi], \mathbb{R}^2)$, $r > 0$, $\varphi > 0$ fest. Es gilt $S(\gamma) = \int_0^\varphi \|\gamma'(t)\|_2\ \mathrm{d}t = \int_0^\varphi \left\| \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \right\|_2\ \mathrm{d}t = \int_0^\varphi r\,\mathrm{d}t = r\varphi$. Also ist der Umfang des Einheitskreises genau $\int_0^{2\pi} \underbrace{r}_{=1}\ \mathrm{d}t = 2\pi$.

2. Zykloide $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. Wir erhalten $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und daher $\|\gamma'(t)\|_2^2 = 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) = 2 - 2\cos(t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Insgesamt gilt

also

$$S(\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left|2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}_{\geq 0} \,\mathrm{d}t \overset{x=\frac{t}{2}}{=} 4\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 8$$

6.3 Parametertransformationen

Definition 6.10 (Parametertransformation). 1. Sei $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^k-Abbildung ($k \in \mathbb{N}_0 \cup +\infty$) zwischen den Intervallen $[\alpha,\beta]$ und $[a,b]$, sei außerdem φ bijektiv und $\varphi^{-1} \in C^k([a,b],\ [\alpha,\beta])$. Dann heißt φ eine C^k-Parametertransformation.

2. Sei weiter $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann heißt die Kurve $\delta : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$, $\delta := \gamma \circ \varphi$ die Umparametrisierung von γ (mittels φ).

3. Die Parametertransformation $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ heißt orientierungstreu (oder orientierungserhaltend), wenn φ streng monoton wächst; φ heißt orientierungsumkehrend, wenn φ streng monoton fällt.

Bemerkung 6.11. 1. Falls φ eine C^1-Parametertransformation ist, dann gilt

$$\varphi'(t) \neq 0,\ \forall t \in I,$$

d.h. φ ist ein Diffeomorphismus. Ferner heißt φ orientierungstreu, falls $\varphi'(t) > 0$ und orientierungsumkehrend, falls $\varphi'(t) < 0$.

2. Die Bogenlänge $S(\gamma)$ ändert sich nicht beim Umparametrisieren: Seien φ, φ^{-1} stetig differenzierbar, $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Bogenlänge

$$\begin{aligned}
S(\gamma\circ\varphi) &= \int_\alpha^\beta \|(\gamma\circ\varphi)'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \\
&= \begin{cases} \int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\|\cdot\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \varphi'(\tau) > 0, \tau\in[\alpha,\beta] \\ -\int_\alpha^\beta \|\gamma'(\varphi(\tau))\|\cdot\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \varphi'(\tau) < 0, \tau\in[\alpha,\beta] \end{cases} \\
&\overset{\substack{t=\varphi(\tau) \\ \mathrm{d}t=\varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau}}{=} \begin{cases} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t & \varphi'(\tau) > 0, \tau\in[a,b] \\ -\int_b^a \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t & \varphi'(\tau) < 0, \tau\in[a,b] \end{cases} \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= S(\gamma)
\end{aligned}$$

3. Umparametrisierung auf Bogenlänge. Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^1-Kurve, d.h. $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$. Definiere die Abbildung $\sigma\colon [a,b] \to [0, S(\gamma)]$ durch

$$\sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \left(= S\left(\gamma(t)\big|_{[a,t]}\right)\right).$$

Wir können zeigen, dass $\varphi := \sigma^{-1}$ eine orientierungstreue C^1-Parametertransformation ist und für die („auf Bogenlänge") umparametrisierte Kurve $\beta\colon [0, S(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$S\left(\beta\big|_{[0,x]}\right) = x,\ \|\beta'(x)\| = 1,\ \forall x \in [0, S(\gamma)].$$

Beweis. Es gilt $\sigma \in C^1([a,b];\ [0,S(\gamma)])$ mit $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. Daher ist σ streng monoton wachsend und bijektiv. Wegen Satz 4.48 folgt

$$\underbrace{\sigma^{-1}}_{=:\varphi} \in C^1([0,S(y)];\ [a,b]),\ (\sigma^{-1})'(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(x))\|} > 0.$$

Also ist φ streng monoton wachsend und daher muss φ orientierungstreu sein. Für

$$\beta\colon [0,S(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad \beta := \gamma \circ \varphi$$

gilt

$$\beta'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \gamma'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{\gamma'(\varphi(x))}{\|\gamma'(\varphi(x))\|}.$$

Also erhalten wir $\|\beta'(x)\| = 1\ \forall x \in [0,S(\gamma)]$ und damit $S\left(\beta|_{[0,x]}\right) = \int_0^x \|\beta'(s)\|\ \mathrm{d}s = x$. $\square$

Beispiel 6.12. Umparametrisierung auf Bogenlänge einer Zykloide: Es gilt $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$ und damit

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad 0 \le t \le 2\pi \\ \implies \|\gamma'(t)\| &> 0 \qquad \text{für } 2\varepsilon \le t \le 2\pi - 2\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Betrachte also $\gamma\colon [2\varepsilon, 2\pi - 2\varepsilon] \to \mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= S\left(\gamma|_{[2\varepsilon,t]}\right) \\ &= \int_{2\varepsilon}^t \|\gamma'(\tau)\|\ \mathrm{d}\tau \\ &= 2\int_{2\varepsilon}^t \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\ \mathrm{d}\tau \\ &\overset{\substack{s=\tau/2 \\ \mathrm{d}s=\mathrm{d}\tau/2}}{=} 4\int_{\varepsilon}^{t/2} \sin s\,\mathrm{d}s \\ &= -4\cos s\Big|_{\varepsilon}^{t/2} = 4\left(\cos\varepsilon - \cos\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Somit gilt $\sigma\colon [2\varepsilon, 2\pi - 2\varepsilon] \to [0, 8\cos\varepsilon]$. Ziel:

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0, 8\cos\varepsilon] &\to [2\varepsilon, 2\pi - 2\varepsilon] \\ s &\mapsto \varphi(s) = t \end{aligned}$$

Dazu setzen wir $\varphi = \sigma^{-1}$ und bestimmen die Umkehrfunktion von σ

$$\begin{aligned} s &= 4\left(\cos\varepsilon - \cos\frac{t}{2}\right) \\ \implies \cos\frac{t}{2} &= \cos\varepsilon - \frac{s}{4} \\ \implies t &= \underbrace{2\arccos\left(\cos\varepsilon - \frac{s}{4}\right)}_{\varphi(s),\ s\in[0,8\cos\varepsilon]} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $\beta(s) = \gamma(\varphi(s))$.

6.4 Kurvenintegrale

Definition 6.13 (Integrationsweg)**.** Eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt Integrationsweg, falls γ stetig und stückweise eine C^1-Abbildung ist.

Definition 6.14 (Skalares Kurvenintegral)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a,b] \to D$ ein Integrationsweg und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

das skalare Kurvenintegral von f längs γ. Dabei heißt $\mathrm{d}s = \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ das skalare Bogenelement von γ und f wird Skalarfeld genannt.

Beispiel 6.15.

1. $f \equiv 1$: Das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = S(\gamma)$ entspricht der Länge von γ.
2. Dichtefunktion $\rho(s)$:

$$\begin{aligned} \rho(\gamma(t)) &: \text{ Dichte verteilt auf } \gamma(t) \\ \int_\gamma \rho(s)\,\mathrm{d}s =: \mu(\gamma) &: \text{ Gesamtmasse von } \gamma \end{aligned}$$

Bemerkung 6.16.

1. Das Kurvenintegral ist linear:

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,\mathrm{d}s = \lambda_1 \int_\gamma f_1\,\mathrm{d}s + \lambda_2 \int_\gamma f_2\,\mathrm{d}s$$

2. Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}s\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \sup_{s\in[a,b]} |f(\gamma(s))| \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \sup_{s\in[a,b]} |f(\gamma(s))| \cdot S(\gamma). \end{aligned}$$

3. Das Kurvenintegral ist invariant unter C^1-Parametertransformation. Sei $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1 Parametertransformation. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma\circ\varphi} f\,\mathrm{d}s &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(\varphi(s)) \right\| \mathrm{d}s \\ &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s))) \left\| \gamma'(\varphi(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s) \right\| \mathrm{d}s \\ &= \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s)\right) \mathrm{d}s\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s) > 0 \\ \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\| \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s)\right) \mathrm{d}s\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s) < 0 \end{cases} \\ &\overset{\substack{t=\varphi(s) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(s)\,\mathrm{d}s}}{=} \begin{cases} \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\,, & \varphi'(s) > 0 \\ -\int_b^a f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t\,, & \varphi'(s) < 0 \end{cases} \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma f\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Definition 6.17 (Vektorfeld)**.** Ein Vektorfeld F auf $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung von D nach $\mathbb{R}^n$, d.h. jedem $x \in D$ wird ein Vektor $F(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet.

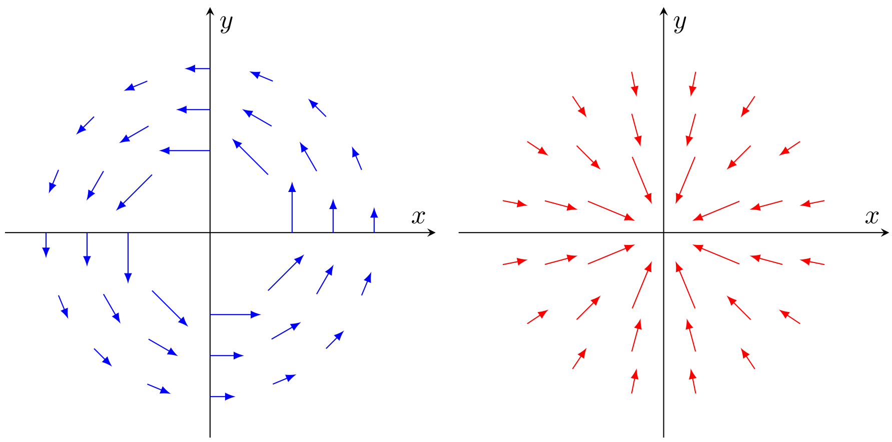
Beispiel 6.18.

1. Windungsfeld

$$W\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad W(x,y) := \frac{1}{\|(x,y)\|_2^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

2. Gravitationsfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad G(x,y,z) := -\frac{1}{\|(x,y,z)\|_2^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



(a) Beispiel 1: Windungsfeld (b) Beispiel 2: Gravitationsfeld bei $z = 0$.

Definition 6.19 (Vektorielles Kurvenintegral)**.** Sei $\gamma\colon [a,b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg und $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das (vektorielle) Kurvenintegral von F längs γ definiert durch

$$\int_\gamma F = \int_\gamma F \,\mathrm{d}\vec{s} := \int_a^b \underbrace{\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle}_{\text{Skalarprodukt}} \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \,\mathrm{d}t$$

Alternative Schreibweise: $\int_\gamma F = \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n \,\mathrm{d}x_n$

Beispiel 6.20. Kurvenintegral des Windungsfelds $W\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $W(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ längs $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \int_\gamma W &= \int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^+y^2} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right) \mathrm{d}t = 2\pi \end{aligned}$$

Bemerkung 6.21.

1. Das Kurvenintegral ist linear:

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 \int_\gamma F_1 + \lambda_2 \int_\gamma F_2$$

2. Standard-Abschätzung:

$$\left|\int_\gamma F\right| = \left|\int_a^b \big(F(\gamma(t)), \gamma'(t)\big)\ \mathrm{d}t\right| \le \sup_{t\in[a,b]} \|F(\gamma(t))\| \cdot S(\gamma)$$

3. Invarianz unter orientierungstreuen C^1-Parametertransformationen. Sei $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation mit $\varphi'(s) > 0,\ \forall s \in [\alpha,\beta]$ ($\Longleftrightarrow$ orientierungstreu). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} F &= \int_\alpha^\beta \left(F(\gamma(\varphi(s))), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(\varphi(s))\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_\alpha^\beta \left(F(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(s)\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_\alpha^\beta \left(F(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s))\right) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}(s)\, \mathrm{d}s \\
&\overset{\substack{t=\varphi(s) \\ \mathrm{d}t=\varphi'(s)\,\mathrm{d}s}}{=} \int_a^b \big(F(t), \gamma'(t)\big)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma F.
\end{aligned}$$

Definition 6.22 (Gebiet)**.** $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, falls U offen ist und wegzusammenhängend, d.h. $\forall\, x, y \in U$ existiert $\gamma \in C^0([a,b], U)$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Satz 6.23. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\forall\, x, y \in U$ existiert ein Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.
2. U ist wegzusammenhängend.

Beweis. Ohne Beweis. □

Beispiel 6.24.

1. Sei $U = K_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \cup K_1\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. U ist kein Gebiet, denn es existiert kein stetiger Weg von $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ in U.
2. $U \subset \mathbb{R}$ Gebiet $\Longleftrightarrow$ U offenes Intervall

6.5 Potential

Definition 6.25 (Geschlossene Kurve)**.** Eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition 6.26 (Potential)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ ein stetiges Vektorfeld. $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt <u>Potential</u> oder <u>Stammfunktion</u> von F in D, falls $\nabla\varphi = F$ gilt. F heißt in diesem Fall <u>konservativ</u> auf D.

Satz 6.27 (Erster Hauptsatz über Kurvenintegrale)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$. Dann sind folgend Aussagen äquivalent:

(i) F ist konservativ.

(ii) $\int_\gamma F = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege γ in D.

(iii) Das Kurvenintegral von F in D ist wegunabhängig, d.h. für beliebige Integrationswege $\gamma_1 \colon [a,b] \to D,\ \gamma_2 \colon [\alpha,\beta] \to D$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(\alpha)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(\beta)$ gilt

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F.$$

In diesem Fall erhalten wir eine Stammfunktion $\varphi_0 \in C^1(D, \mathbb{R})$ durch $\varphi_0(x) \coloneqq \int_\gamma F$, wobei γ ein Integrationsweg von einem gewählten Punkt $x_0 \in D$ zu $x \in D$ ist. Die Menge aller Potentiale von F ist gegeben durch $\{\varphi_0 + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $F = \nabla\varphi$, $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\gamma \colon [a,b] \to D$ geschlossener Integrationsweg. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &\overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b (F(\gamma(t)), \gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (\nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\gamma \text{ stückweise } C^1}{=} \sum_{i=1}^M \int_{s_{i-1}}^{s_i} (\nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{i=1}^M \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi \circ \gamma)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \sum_{i=1}^M (\varphi(\gamma(s_i)) - \varphi(\gamma(s_{i-1}))) \\
&= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\
&\overset{\gamma(b)=\gamma(a)}{=} 0.
\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Nach Umparametrisierung gelte o.E. $[a,b] = [-1,0] = [\alpha,\beta]$. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon [-1,0] \to D$ Integrationswege mit gleichem Anfangs und Endpunkt, d.h. $\gamma_1(-1) = \gamma_2(-1)$ und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Dann betrachte

$$\begin{aligned}
&\gamma \colon [-1,1] \to D \\
&t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [-1,0] \\ \gamma_2(-t) & t \in [0,1] \end{cases}.
\end{aligned}$$

Dann ist γ ein geschlossener Integrationsweg, also folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma F \\
&= \int_{-1}^0 (F(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (F(\gamma_2(-t)), -\gamma_2'(-t))\,\mathrm{d}t \\
&\overset{s:=-t}{=} \int_{\gamma_1} F + \int_0^{-1} (F(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s))\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F.
\end{aligned}$$

(iii) $\implies$ (i): Fixiere $x_0 \in D$ und definiere $\varphi_0 \colon D \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_0(x) := \int_\gamma F$, wobei γ irgendein Integrationsweg von x_0 nach x ist. Zu $x \in D$ betrachte $x + he_i \in D$ für $|h| \ll 1$. Nach Umparametrisierung gelte o.E.

$$\begin{aligned}
&\gamma_x \colon [-1,0] \to D \\
&\gamma_{x+he_i} \colon [-1,1] \to D \\
&\gamma_{x+he_i} := \begin{cases} \gamma_x(t) & t \in [-1,0] \\ x + the_i & t \in [0,1] \end{cases}.
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_i} &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_0(x+he_i) - \varphi_0(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{x+he_i}} F - \int_{\gamma_x} F \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \left(F(x+the_i), \gamma_{x+he_i}'(t) \right)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 (F(\underbrace{x+the_i}_{\xrightarrow{h\to 0} F(x)}), he_i)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (F(x), e_i)\,\mathrm{d}t \\
&= F_i(x).
\end{aligned}$$

Damit ist $\varphi_0 \in C^1(D,\mathbb{R})$ und $\nabla\varphi_0 = F$. Das zeigt (i).

Sei γ ein Integrationsweg von $x_0 \in D$ nach $x \in D$. Dann definiere

$$\varphi_0(x) := \int_\gamma F.$$

Sei weiter $\varphi \in C^1(D,\mathbb{R})$ mit $\nabla\varphi = F$. Dann gilt wegen (i) und (ii):

$$\int_\gamma F = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Damit folgt

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi_0(x) \implies \varphi(x) = \varphi_0(x) + \underbrace{\varphi(x_0)}_{\text{konst.}} = \varphi_0(x) + c.$$

□

Beispiel 6.28. 1. Windungsfeld:

$$W(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}.$$

$D := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$. W ist nicht konservativ auf D weil mit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ ist

$$\int_\gamma W = 2\pi \neq 0.$$

Aber mit $D := \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid y > 0\right\}$ ist

$$\varphi(x,y) := -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

ein Potential von W auf D, denn

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Die Existenz eines Potentials hängt also auch von D ab.

2. Suche nach einem Potential: $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) := \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$. Falls Potential existiert, dann gilt

$$\varphi_0(x,y) := \int_\gamma F.$$

mit z.B. $\gamma(t) := t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \int_0^1 (F(\gamma(t)), \gamma'(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(\begin{pmatrix}ty\\tx\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (tyx + txy)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 2txy\,\mathrm{d}t\\ &= xy.\end{aligned}$$

Definiere $\varphi = xy$. Dann ist $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y = F_1(x,y)$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}x = F_2(x,y)$. Also $\nabla\varphi = F$.

6.6 Existenz von Potentialen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ein konservatives Vektorfeld. Dann existiert ein $\varphi \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\nabla\varphi = F$, d.h. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = F_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Da φ zweimal stetig differenzierbar, folgt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Ist also $F \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ konservativ, dann gelten notwendig die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Speziell für $n = 2$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}.$$

Für $n = 3$:

$$\operatorname{rot}(F) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind nicht hinreichend.

Beispiel 6.29 (Windungsfeld)**.**

$$W(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial W_y}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial W_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Also gilt $\frac{\partial W_y}{\partial x} = \frac{\partial W_x}{\partial y}$ auf $D := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, aber auf D existiert kein Potential (vgl. 6.28).

Definition 6.30 (Homotopie)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\gamma_0, \gamma_1 \in C([a, b], D)$ stetige Kurven.

(i) Es gelte $\gamma_0(a) = A = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = B = \gamma_1(b)$. γ_0 und γ_1 heißen homotop in D, falls eine stetige Abbildung $H\colon [a, b] \times [0, 1] \to D$ (Homotopie) existiert, s.d. $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in [a, b]$ sowie $H(a, s) = A$ und $H(b, s) = B$, $\forall s \in [0, 1]$.

Für $s \in [0, 1]$ sind $\gamma_s(t) := H(t, s)$, $t \in [a, b]$ mit $\gamma_s(a) = A$ und $\gamma_s(b) = B$ stetige Kurven von A nach B in D. H heißt stetige Deformation von γ_0 nach γ_1.

(ii) γ_0 und γ_1 seien geschlossen. γ_0 und γ_1 heißen frei homotop in D, falls eine stetige Abbildung $H\colon [a, b] \times [0, 1] \to D$ existiert mit $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in [a, b]$ und $H(a, s) = H(b, s)$, $\forall s \in [0, 1]$, d.h. für $s \in [0, 1]$ ist $\gamma_s(t) := H(t, s)$ eine geschlossene Kurve in D.

H heißt stetige Deformation innerhalb von D der geschlossenen Kurve γ_0 nach der geschlossenen Kurve γ_1.

(iii) Eine geschlossene Kurve heißt zusammenziehbar in D, wenn sie frei homotop zu einer konstanten Kurve ist, d.h. sie sich in D zu einem Punkt zusammenziehen lässt.

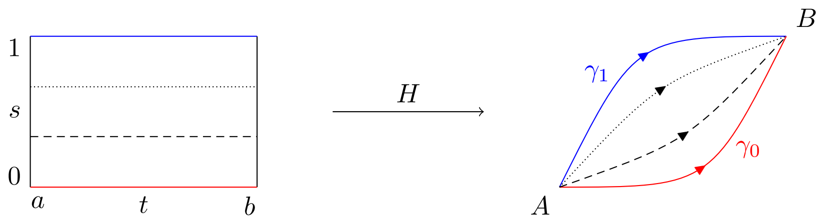


Abbildung 6.5: Stetige Deformation von γ_0 nach γ_1

Beispiel 6.31. Ellipse: Seien $a, b > 0$.

$$\varepsilon(t) := \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ist frei homotop zum Kreis

$$K(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

via der Homotopie

$$\begin{aligned} &H\colon [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &H(t,s) := sK(t) + (1-s)\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|H(t,s)\|^2 &= (s + a(1-s))^2 \cos^2(t) + (s + b(1-s))^2 \sin^2(t) \\ &\geq \min(1, a^2, b^2)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= \min(1, a^2, b^2) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also $H(t,s) \neq 0 \ \forall t, s$.

Satz 6.32 (Zweiter Hauptsatz der Kurvenintegrale: Homotopieinvarianz)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Integrabilitätsbedingungen und seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to D$ Integrationswege.

Sind γ_0 und γ_1 homotop in D mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt oder geschlossen und frei homotop in D, dann gilt

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_0} F.$$

Beweis. ohne Beweis □

Beispiel 6.33 (Windungsfeld)**.** 1. Für Ellipse $\varepsilon(t)$ und Kreis $K(t)$ (vgl. Beispiele 6.31 und 6.28) gilt

$$\int_K W = 2\pi \overset{6.32}{=} \int_\varepsilon W = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t\,.$$

Also folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

2. Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\gamma_0 \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \gamma_1(t) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

γ_0 und γ_1 sind nicht frei homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, weil

$$\int_{\gamma_0} W = 2\pi \neq -2\pi = \int_{\gamma_1} W.$$

3. Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\gamma_0 \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \gamma_1(t) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

γ_0, γ_1 sind nicht homotop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, weil

$$\int_{\gamma_0} W = \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}t \neq \int_0^\pi -1 \,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_1} W \,\mathrm{d}t\,.$$

Definition 6.34 (Einfach zusammenhängend)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. D heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in D frei homotop zu einer konstanten Kurve ist, d.h. jede geschlossene Kurve in D zusammenziehbar ist.

Definition 6.35 (Sternförmig)**.** Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn ein $x_1 \in D$ existiert, s.d. $\forall x \in D$ gilt:

$$x_1 + t(x - x_1) \in D \quad \forall t \in [0, 1].$$

D.h. $\forall x \in D$ liegt die Verbindungsstrecke von x_1 nach x in D.

Bemerkung 6.36. Jedes Sterngebiet ist einfach zusammenhängend.

Beweis. $H(t, s) \coloneqq x_1 + s(\gamma(t) - x_1) \in D$, $\forall t$, $\forall s \in [0, 1]$. □

Beispiel 6.37. 1. Jede Kugel $K_r(a)$ ist sternförmig bezüglich a, also auch einfach zusammenhängend.

2. Eine gelochte Kreisscheibe $K_1(0) \setminus \{0\}$, $K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kein Sterngebiet und nicht einfach zusammenhängend.

3. Geschlitzte Scheibe $K_1(0) \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist sternförmig, also einfach zusammenhängend.

4. Jede geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus S_v$ mit $S_v \coloneqq \{tv | t \geq 0, \|v\| = 1\}$ ist sternförmig mit Mittelpunkt $(-v)$, also auch einfach zusammenhängend.

5. $R^n \setminus \{0\}$ ist kein Sterngebiet, weil $0 \in$ Strecke von $-a$ nach a, aber einfach zusammenhängend für $n \geq 3$.

Satz 6.38 (Lemma von Poincaré)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $F \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Integrabilitätsbedingunen. Dann ist F konservativ.

Beweis. Sei γ geschlossener Integrationsweg in D. Da D einfach zusammenhängend, ist γ frei homotop zu einem konstanten Weg γ_C. Damit folgt

$$\int_\gamma F \overset{6.32}{=} \int_{\gamma_C} F \overset{\text{Def.}}{=} \int_a^b (F(\gamma_C(t)), \gamma_C'(t))\,\mathrm{d}t \; = 0.$$

Damit folgt mit 6.27, dass F konservativ. □

Ende. □